

第 1 章 信号与系统的基本概念

步入二十一世纪后，人类社会就进入了信息社会，信息社会的关键是信息的使用和传递。消息依附于某一物理量上就构成了信号。信息与信号密切相关，在现代社会中，人们广泛地涉足信号与系统的问题。特别是随着近代科学技术的发展，大规模、超大规模集成电路的出现，数字计算机的广泛应用，使得信号与系统日益复杂和综合，从而大大促进了其理论研究的发展。

在系统理论研究中主要包括两大任务：其一是系统分析；其二是系统综合。系统分析主要是处理整个系统与输入及输出信号的关系，以完成系统所具有的功能；系统综合则是为达到预期输出的目的而完成对物理模型的建立。

系统的概念是广义的，它极其广泛地出现在各个领域。本书仅限于对电信号及电系统的分析。

1.1 信号及其描述方式

1.1.1 信号

所谓信号，广泛地说其是随时间变化的物理量，是传递和记录信息的一种工具。从数学的角度而言，它可以看成是一个或多个独立变量的函数表达式。从通信技术角度而言，是借助电、光、声信号将文字、图像、语音、数码等信息从甲地传递到乙地或对不同信号进行各种形式的处理。本书中的电信号主要是指随时间或频率变化的电压量及电流。

1.1.2 信号的描述方式

信号的描述方式主要有两种：一种是解析函数表达形式，另一种是图像表达形式。信号的独立变量与其函数的依托关系是多种形式的，例如以时间特征量作为自变量来表示信号，则称之为时域表示法，即把一个信号随时间变化的规律用 $x = x(t)$ 的解析函数表达式描述出来，或通过图像的形式描述出来。

若以频率特征量作为自变量来描述信号，则称之为频域表示法。这种信号既可以用解析函数表示也可以用图像表示。

1.2 信号的分类

由语音、图像、数码等形成的电信号，其形式是多种多样的，根据其本身的特征，可按以下几种方式分类。

1. 确定性信号与随机信号

如果信号可以表示为一个或几个自变量的确定函数，则称此信号为确定性信号，如正弦信号、阶跃信号等。

如果一个信号在发生以前无法确切地知道它的波形，即该信号没有确定的函数表达式，而

只能预测该信号对某一数值的概率,这样的信号就称之为随机信号。例如,信息传输过程中的信号严格来说都是随机的,因为这种信号中包含着干扰和噪声。

2. 周期信号与非周期信号

如果一个信号每隔固定的时间 T 都精确地再现该信号的本身,则称之为周期信号。周期信号具有两大特点,即周而复始且无始无终。一个连续时间周期信号的表达式为

$$x(t) = x(t \pm nT) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1-1)$$

满足此式的最小 T 值为信号的周期。只要给出该信号在一个周期内的变化过程,便可以确定它在任意时刻的数值。

作为非周期信号则无固定时间长度的周期。例如通信系统中测试所采用的正弦波,雷达中的矩形脉冲都是周期信号,而语音波形、开关启闭所造成的瞬态则是非周期信号。

3. 连续时间信号与离散时间信号

如果在所讨论的时间间隔内,除若干个不连续点之外,对于任意时间值都可给出确定的函数值,此信号就称为连续信号。例如,正弦波或如图 1-1 所示的矩形脉冲都是连续信号。连续信号的幅值可以是连续的,也可以是离散的(只取某些规定值)。时间和幅值都为连续的信号又称为模拟信号。离散信号在时间上是离散的,只在某些不连续的规定瞬时给出函数值,在其他时间没有定义,如图 1-2 所示的信号。此图对应的函数 $x(t)$ 只在 $t = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ 等离散时刻给出函数值 $2.1, -1, 1, 2, 0, 4.3, -2, \dots$ 。给出函数值的离散时刻的间隔可以是均匀的,也可以是不均匀的,一般情况下都采用均匀间隔,如图 1-2 所示。这时,自变量 t 简化为用整数序号 n 表示,函数符号记为 $x(n)$,仅当 n 为整数时 $x(n)$ 才有定义。离散时间信号也可以被认为是一组序列值的集合,用 $\{x(n)\}$ 表示。

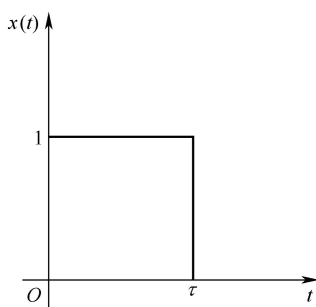


图 1-1 矩形脉冲

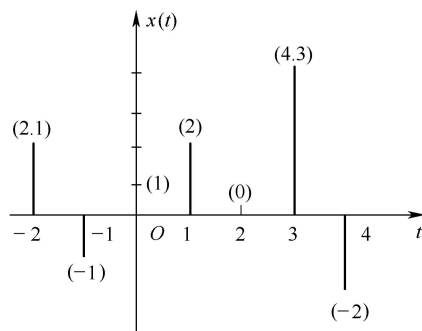


图 1-2 离散信号(抽样信号)

图 1-2 所示信号写作序列为

$$x(n) = \begin{cases} 2.1 & (n = -2) \\ -1 & (n = -1) \\ 1 & (n = 0) \\ 2 & (n = 1) \\ 0 & (n = 2) \\ 4.3 & (n = 3) \\ -2 & (n = 4) \end{cases}$$

为简化表达, 此信号也可记为

$$x(n) = \{2.1 \quad -1 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 0 \quad 4.3 \quad -2\} \quad (1-2)$$

数字 1 下面的箭头表示与 $n=0$ 相对应, 左右两边依次给出 n 取负整数和正整数时对应的 $x(n)$ 值。

如果离散时间信号的幅值是连续的, 则又可称之为抽样信号, 如图 1-2 所示。另一种情况是离散信号的幅值也被限定为某些离散值, 也即时间与幅度取值都具有离散性, 这种信号又称为数字信号, 各离散时刻的函数取值只能是“0”和“1”, 如图 1-3 所示。此外, 还可以有幅度为多个离散值的多电平数字信号。

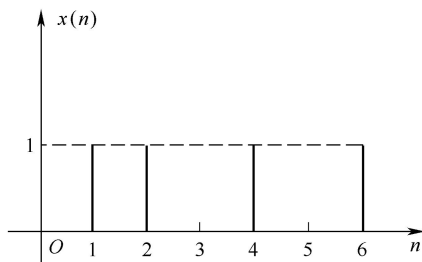


图 1-3 离散信号 (数字信号)

4. 能量信号与功率信号

能量信号是一个脉冲式信号, 它通常只存在于有限的时间间隔内。当然还有一些信号它们存在于无限的时间间隔内, 但其能量的主要部分集中在有限时间间隔内, 对于这样的信号也称之为能量信号。如图 1-4 所示都为能量信号。

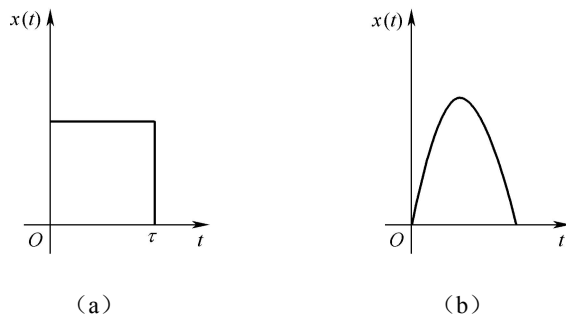


图 1-4 能量信号

作为能量信号在 $(-\infty, \infty)$ 时间间隔内, 在 1Ω 电阻上所消耗的能量可定义为

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt < \infty \quad (1-3)$$

其中 $x(t)$ 既可为电压信号, 又可为电流信号。

当时间间隔趋于无限时, 其在 1Ω 电阻上所消耗的能量也趋于无穷大, 但在 1Ω 电阻上消耗的平均功率是大于零的有限值, 则这样的信号为功率信号。作为功率信号, 其平均功率可定义为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1-4)$$

由此可概括为, 若信号 $x(t)$ 能量有限, 即 $0 < E < \infty$, 此时 $P=0$, 则称该信号为能量信号; 若信号 $x(t)$ 功率有限, 即 $0 < P < \infty$, 此时 $E=\infty$, 则称该信号为功率信号。对于周期信号, 其能量随着时间的增加可以趋于无限, 但功率是有限值, 所以周期信号属于功率信号; 而非周期信号既可以是能量信号, 也可以是功率信号。

1.3 常用单元信号

对于实际信号而言, 大部分都是不同形式的复杂信号, 这些复杂信号通常是由常用的基本单元信号组合而成的, 因此了解常用单元信号是非常必要的。

1.3.1 常用连续信号

1. 正弦信号

正弦信号的定义为

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1-5)$$

式中: A 为振幅, ϕ 为初相位, ω 为角频率。它是周期为 T 的周期信号, 与频率 f 及角频率 ω 的关系为

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1-6)$$

其波形如图 1-5 所示。

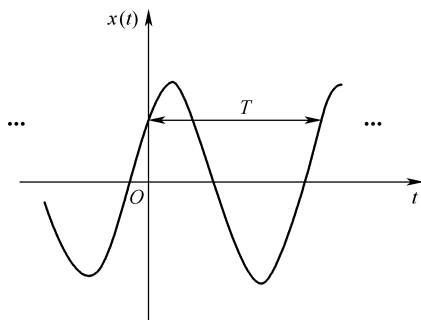


图 1-5 正弦信号波形图

2. 指数信号

指数信号的定义为

$$x(t) = Ae^{at}, \quad -\infty < t < \infty \quad (1-7)$$

式中: a 为任意常数。

当 $a > 0$ 时, $x(t)$ 随 t 增大而呈指数增大; 当 $a < 0$ 时, $x(t)$ 随 t 增大而呈指数衰减; 当 $a=0$ 时, $x(t)=A$ (常数), 其波形如图 1-6 所示。

当指数信号 e^{at} 中的 a 为一复数 s 时, 该信号称之为复指数信号, 其表达式为

$$x(t) = Ae^{st} \quad (1-8)$$

式中, $s = a + j\omega$ 。由欧拉公式可知, 复指数信号可分解为实部和虚部两部分, 即:
 $e^{st} = e^{(a+j\omega)t} = e^{at}e^{j\omega t} = e^{at}(\cos \omega t + j\sin \omega t)$ 。其中, 实部包含余弦信号, 虚部包含正弦信号。而
 s 的实部 a 表示了正弦和余弦振幅随时间变化的情况。当 $a > 0$ 时, 为增幅振荡信号; 当 $a < 0$ 时
 为减幅振荡信号; 当 $a = 0$ 时, 为等幅振荡信号。当 s 的实部 $a = 0$ 时, 复指数信号 e^{st} 将变化
 为纯虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 。

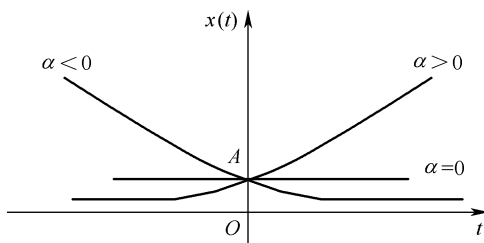


图 1-6 指数信号波形图

3. 抽样信号

抽样信号的定义为

$$x(t) = \frac{\sin t}{t} = Sa(t) \quad (1-9)$$

其波形如图 1-7 所示。

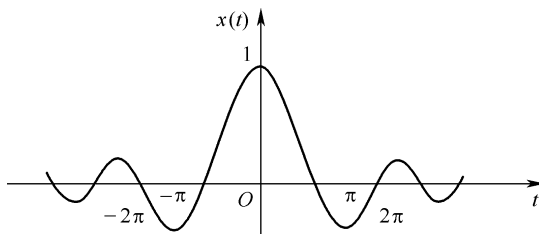


图 1-7 抽样信号波形图

该信号具有如下性质:

(1) 当 $t = 0$ 时,

$$Sa(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad (1-10)$$

(2) 当 $Sa(t) = 0$ 时, 有

$$t = \pm k\pi, k = 1, 2, 3, \dots \quad (1-11)$$

由式 (1-11) 可确定抽样信号的零值点。

(3) 该信号呈现与时间 t 反比衰减振荡的变化趋势。

(4) 该信号是关于时间 t 的偶函数, 即

$$Sa(t) = Sa(-t) \quad (1-12)$$

(5) 该信号在 $(-\infty, +\infty)$ 内的积分值为有限值, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi \quad (1-13)$$

4. 高斯信号

高斯信号的定义为

$$x(t) = E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (1-14)$$

其波形如图 1-8 所示。该信号在时间 $t \rightarrow \pm\infty$ 时趋于零。

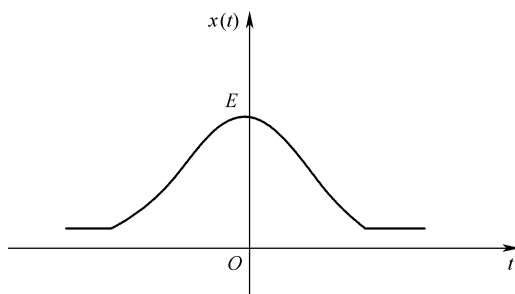


图 1-8 高斯信号波形图

1.3.2 常用奇异信号

若某一信号本身存在不连续点（跳变点）或其导数与积分存在不连续点，则称此信号为奇异信号。一般来说，奇异信号都是实际信号的理想化模型。

1. 单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$

单位阶跃信号定义为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1-15)$$

其波形如图 1-9 所示。

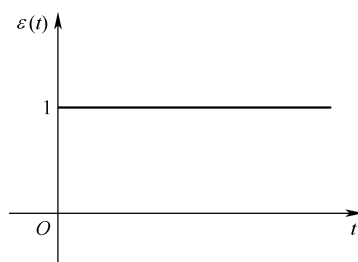


图 1-9 单位阶跃信号波形图

阶跃信号在信号分析中的作用主要是用来描述信号在某一时刻的转换。如果将此信号作为信号源放入电路中，就相当于起到了一个开关换路的作用。因此也常称此信号为“开关”函数。

2. 单位冲激信号 $\delta(t)$

单位冲激信号可定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1-16)$$

其波形如图 1-10 所示。

该信号仅在 $t=0$ 的瞬间存在，且在无穷小的时间间隔内取值为无穷大，但积分值为有限值。图 1-10 中信号的箭头表示该信号的积分值等于 1，通常将其积分值称之为冲激强度。

当冲激信号在 $(-\infty, \infty)$ 区间的积分值为任意常数 A 时，则称之为强度为 A 的冲激信号，用 $A\delta(t)$ 表示，其波形如图 1-11 所示。

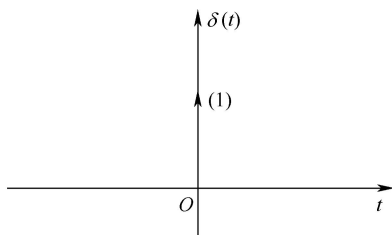


图 1-10 单位冲激信号波形图

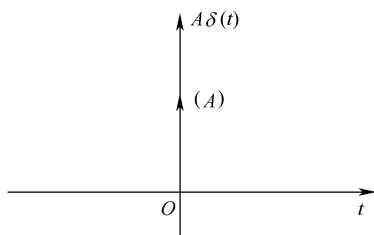


图 1-11 强度为 A 的冲激信号

实际上，冲激信号是通过对某些满足一定条件的规则信号求极限来定义的。最简单的求极限过程如图 1-12 所示的矩形脉冲 $x(t)$ ，其脉冲宽度为 τ ，幅度为 $1/\tau$ 。如果减小脉宽 τ ，则幅度 $1/\tau$ 必然增大，但作为矩形脉冲的面积是不变的。当取 τ 趋于零的极限时，其脉宽趋于无穷小，而幅度趋于无穷大，但二者乘积的极限却趋于一个有限值，即 $x(t)$ 与横轴 t 所围成的面积恒为 1。这个矩形脉冲在 $\tau \rightarrow 0$ 时的极限情况就是单位冲激信号 $\delta(t)$ ，该极限的数学表达式为

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} x(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\varepsilon \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - \varepsilon \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] \quad (1-17)$$

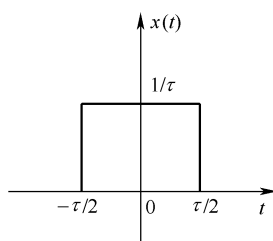


图 1-12 矩形脉冲的极限为冲激信号

冲激信号具有如下性质：

(1) 时移性质

如果单位冲激信号发生在 $t=t_0$ 处，则该信号称为时移冲激信号。其表达式为

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t=t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad (1-18)$$

其波形如图 1-13 (a) 所示。

冲激信号既可以沿时间轴右移也可以沿时间轴左移, 如图 1-13 (b) 所示。



图 1-13 时移后的冲激信号波形图

(2) 抽样性质

按照广义函数的理论, $\delta(t)$ 也可定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \quad (1-19)$$

其中, $x(t)$ 是在 $t=0$ 时刻的连续函数。

证明: 因为 $x(t)$ 是连续函数, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} x(t)\delta(t)dt$$

即在 $t=0$ 时刻, $x(0^-)$ 与 $x(0^+)$ 的取值不变。由此可得

$$\int_{0^-}^{0^+} x(t)\delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} x(0)\delta(t)dt = x(0)\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt$$

由单位冲激信号的定义 $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$, 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

式 (1-19) 中给出了 $\delta(t)$ 的一个重要性质: 即冲激信号抽样性质。此式表明: $\delta(t)$ 与任意信号 $x(t)$ 相乘并在 $(-\infty, \infty)$ 时间内积分, 即可得到 $x(t)$ 在 $t=0$ 时刻 (抽样时刻) 的函数值 $x(0)$ 。同理, 若冲激时刻发生在 $t=t_0$ 处, 则可筛选出抽样时刻 $t=t_0$ 处的函数值 $x(t_0)$, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \quad (1-20)$$

(3) 乘积性质

如果 $x(t)$ 为在 $t=0$ 点连续且处处有界函数, 由式 (1-19) 可有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t)dt = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0)$$

由此可以得到

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (1-21)$$

证明: 引入测试函数 $\phi(t)$ 。首先证明等式左端, 即

$$x(t)\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)x(t)\delta(t)dt = \phi(0)x(0)$$

而等式右端为

$$x(0)\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)x(0)\delta(t)dt = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt = x(0)\phi(0)$$

可见式(1-21)的左端与右端相等。

式(1-21)表明： $\delta(t)$ 与任一信号 $x(t)$ 相乘，其乘积结果是一个强度为 $x(0)$ 的冲激信号，该冲激信号的冲激时刻不变。

将式(1-21)推广可得

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \quad (1-22)$$

(4) 尺度变换性质

由式(1-19)，考虑积分 $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(at)dt$ ，令 $\tau = at$ ，则有

$$a > 0 \text{ 时, } \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(at)dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta(\tau)d\tau = \frac{1}{a}x(0)$$

$$a < 0 \text{ 时, } \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(at)dt = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta(\tau)d\tau = -\frac{1}{a}x(0)$$

综上可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(at)dt = \frac{1}{|a|}x(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt$$

由此得到

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \quad a \neq 0 \quad (1-23)$$

(5) 冲激信号奇、偶性

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (1-24)$$

(6) 冲激信号积分性质

$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (1-25)$$

则由微、积分的互逆运算可有

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau \quad (1-26)$$

3. 符号函数 $\text{sgn}(t)$

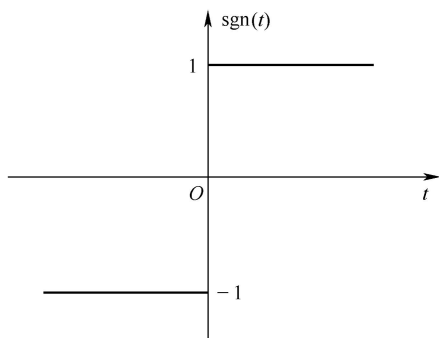
符号函数定义为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (1-27)$$

可以利用阶跃信号来表示符号函数

$$\text{sgn}(t) = 2\varepsilon(t) - 1 = \varepsilon(t) - \varepsilon(-t) \quad (1-28)$$

其波形如图 1-14 所示。

图 1-14 $\text{sgn}(t)$ 信号波形

4. 单位斜变信号

斜变信号也称斜坡信号或斜升信号，是指从某一时刻开始随时间正比例增长的信号。如果增长的变化率是 1，就称作单位斜变信号，其波形图如图 1-15 所示，表示式为

$$r(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1-29)$$

如果将起始点移至 t_0 ，则表示式为

$$r(t-t_0) = \begin{cases} t-t_0, & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad (1-30)$$

其波形图如图 1-16 所示。

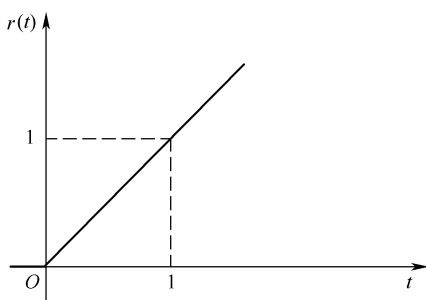


图 1-15 单位斜变信号波形图

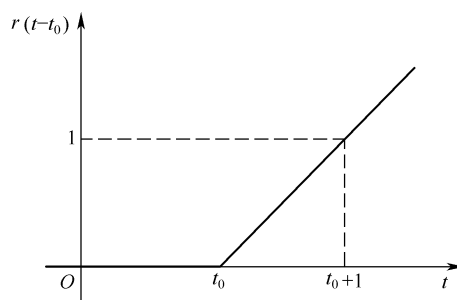


图 1-16 延迟的斜变信号波形图

5. 冲激偶信号

冲激函数的微分（阶跃函数的二阶导数）将呈现正、负极性的一对冲激，称为冲激偶信号，用 $\delta'(t)$ 表示。可以利用规则函数系列取极限的概念引出 $\delta'(t)$ ，在此借助三角形脉冲系列，波形如图 1-17 (a) 所示。三角形脉冲 $s(t)$ 的底宽为 2τ ，高度为 $\frac{1}{\tau}$ ，当 $\tau \rightarrow 0$ 时， $s(t)$ 成为单位冲激函数 $\delta(t)$ 。在图 1-17 (c) 中画出 $\frac{ds(t)}{dt}$ 波形，它是正、负极性的两个矩形脉冲，称为脉冲偶对。其宽度都为 τ ，高度分别为 $\pm \frac{1}{\tau^2}$ ，面积都是 $\frac{1}{\tau}$ 。随着 τ 减小，脉冲偶对宽度变窄，

幅度增高, 面积为 $\frac{1}{\tau}$ 。当 $\tau \rightarrow 0$ 时, $\frac{ds(t)}{dt}$ 是正、负极性的两个冲激函数, 其强度均为无穷大, 如图 1-17 (d) 所示, 这就是冲激偶信号 $\delta'(t)$ 。冲激偶信号的一个重要性质为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)dt = -x'(0) \quad (1-31)$$

这里, $x'(t)$ 在 0 点连续, $x'(0)$ 为 $x(t)$ 导数在零点的取值。此关系式可由分部积分展开而得到。

证明:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)x(t)dt = x(t)\delta(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\delta(t)dt = -x'(0)$$

对于延迟 t_0 的冲激偶信号 $\delta'(t-t_0)$, 同样有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-t_0)x(t)dt = -x'(t_0) \quad (1-32)$$

冲激偶信号的另一个性质是它所包含的面积等于零, 这是因为正、负两个冲激的面积相互抵消了。于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0 \quad (1-33)$$

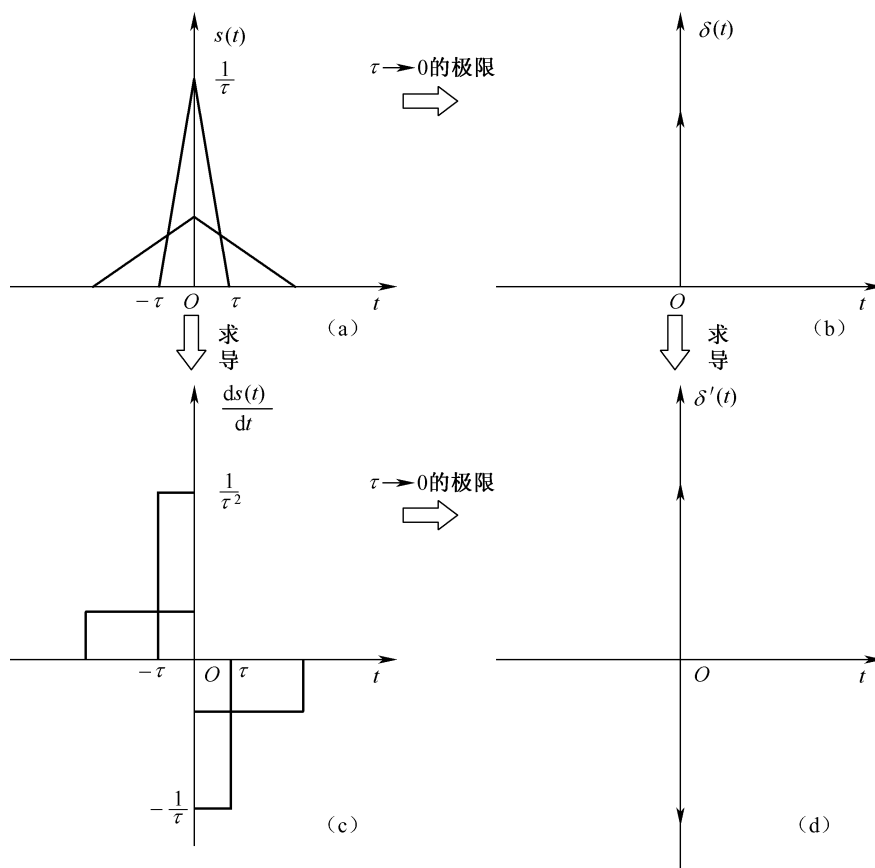


图 1-17 冲激偶信号的形成

1.4 信号的运算

信号运算形式可以分为以下几种：信号和与积运算，信号尺度变换运算，信号时移运算，信号反褶运算，信号微、积分运算等。一般来说，确定信号的各种运算都可以采用两种方法：一种是通过图像进行信号的各种运算；另一种是通过解析形式进行信号的各种运算。

1. 信号和与积运算

信号和与积运算是指信号进行代数相加与相乘，这类运算较为简单。需要注意的是，必须将同一瞬间的两个函数值相加或相乘。

2. 信号时移运算

信号时移运算就是将信号 $x(t)$ 转换为 $x(t+a)$ 的过程，即 $x(t) \rightarrow x(t+a)$ 。信号可以沿时间轴左移或右移。当 $a > 0$ 时，信号波形沿时间轴左移；当 $a < 0$ 时，信号波形沿时间轴右移。

3. 信号尺度变换运算

信号尺度变换运算（信号压扩运算）就是将信号 $x(t)$ 转换成新的信号 $x(at)$ 的过程，即 $x(t) \rightarrow x(at)$ 。其中， a 为压扩系数，可以为正，也可以为负，但 $a \neq 0$ 。

若 $a > 1$ ，则将 $x(t)$ 图像压缩到 $1/a$ 倍即得到 $x(at)$ 的图像；若 $0 < a < 1$ ，则将 $x(t)$ 图像扩展到 $1/a$ 倍而得到 $x(at)$ 的图像。

需要注意的是：信号压扩运算是指在时间轴上进行图形的压缩或扩展，而在整个变换过程中信号的幅度不变。

4. 信号反褶运算

信号反褶运算即是将 $x(t)$ 转换为 $x(-t)$ 的过程，或者说是信号尺度变换运算 $x(at)$ 中 $a = -1$ 时的特殊情况。其实质就是将原信号 $x(t)$ 图像相对纵轴作反褶。

5. 信号幅度变换运算

信号幅度变换运算的过程即是将 $x(t)$ 转换为 $ax(t)$ 的过程，将 $x(t)$ 图像上每个时刻对应的新值变为原值的 a 倍，就得到了 $ax(t)$ 的图像。

6. 信号微、积分运算

(1) 信号微分运算

信号微分运算将包含两种情况：一种是对连续信号微分运算，这种运算与连续函数微分运算相同；另一种是对奇异信号微分运算，在这种微分运算中，将包含对信号连续部分的微分运算和对间断点（也可称为跳变点）的微分运算。从数学角度讲，间断点处无穷小极限的取值将是不定值。而按前面所讨论关于冲激信号的物理含义，这个不定值可以理解为在间断点处，信号在无穷小时间内将受到一个无穷大能量的冲激，导致信号在该点发生跳变。这实际上意味着，在该点处应有一个冲激信号存在，所以信号在间断点处的微分结果应是一个冲激信号。

(2) 信号积分运算

如果信号微分运算需要注意间断点处微分，那么信号积分运算就必须注意在做分段积分时，前一段积分对后面积分的影响。

以上讨论的都是信号基本单元运算。但实际信号运算都是由基本单元运算所组成的复杂运算。一般来说是将原信号 $x(t)$ 转换为 $x(at \pm b)$ 的过程。在这样的转换中将包含信号时移、尺度变换、反褶等运算。这里需注意：在同时含有信号的多种运算时，与信号基本运算顺序无关，

每一步骤只参与一种基本运算，逐步完成。

例 1-1 已知信号 $x(t)$ 的波形如图 1-18 (a) 所示，试画出 $x(-3t-2)$ 波形。

解：(1) 首先考虑移位的作用，求得 $x(t-2)$ 波形如图 1-18 (b) 所示。

(2) 将 $x(t-2)$ 作尺度倍乘，求得 $x(3t-2)$ 波形如图 1-18 (c) 所示。

(3) 将 $x(3t-2)$ 反褶，给出 $x(-3t-2)$ 波形如图 1-18 (d) 所示。

如果改变上述运算的顺序，例如先求 $x(3t)$ 或先求 $x(-t)$ ，最终也会得到相同的结果。

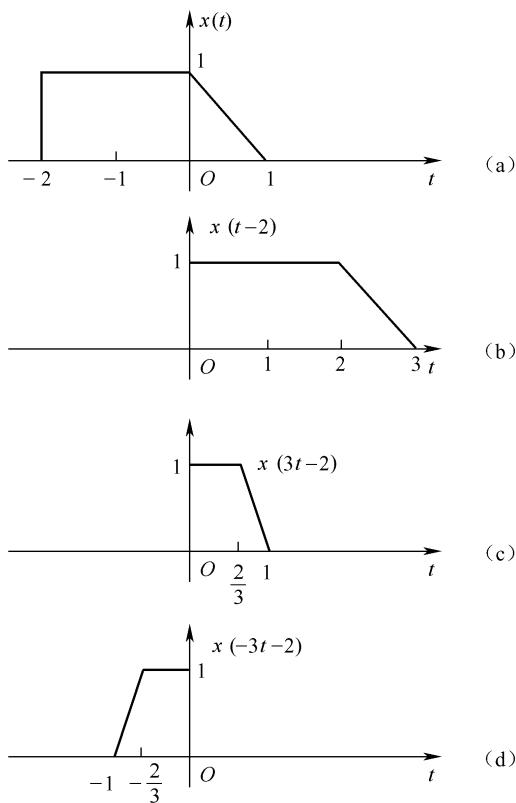


图 1-18 例 1-1 的波形

1.5 信号的分解与合成

对于实际信号及系统的分析和处理，我们常采用将复杂信号进行单元函数分解后再合成的方法。按照数学理论，对信号进行分解可有多种形式，最终将信号分解为何种形式需根据所讨论问题的实际要求来确定。本节只对几种常用的信号分解形式作简单讨论，而每一种信号分解过程将在后续所学内容上作详细讨论。

1. 任意信号分解为直流分量与交流分量之和

信号平均值即信号的直流分量。从原信号中去掉直流分量即得信号的交流分量。设原信号为 $x(t)$ ，分解为直流分量 x_D 与交流分量 $x_A(t)$ ，表示为

$$x(t) = x_D + x_A(t) \quad (1-34)$$

若此时间函数为电流信号, 则在时间间隔 T 内流过单位电阻所产生的平均功率应等于

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x_D + x_A(t)]^2 dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [x_D^2 + 2x_D x_A(t) + x_A^2(t)] dt \\
 &= x_D^2 + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_A^2(t) dt
 \end{aligned} \quad (1-35)$$

在推导过程中用到 $x_D x_A(t)$ 的积分等于零。由式 (1-35) 可见, 一个信号的平均功率等于直流功率与交流功率之和。

2. 任意信号分解为偶分量与奇分量之和

设 $x_e(t)$ 表示信号 $x(t)$ 的偶分量, $x_o(t)$ 表示信号 $x(t)$ 的奇分量, 则有

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (1-36)$$

由数学理论可知: 偶函数与奇函数定义为

偶函数

$$x_e(t) = x_e(-t) \quad (1-37)$$

其波形关于纵轴对称。

奇函数

$$x_o(t) = -x_o(-t) \quad (1-38)$$

其波形关于坐标原点对称。

联立求解式 (1-37) 及式 (1-38) 可得 $x_e(t)$ 、 $x_o(t)$ 与 $x(t)$ 的关系式为

$$x_e(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)] \quad (1-39)$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)] \quad (1-40)$$

3. 任意时域连续信号分解为无穷多连续冲激信号之和

为了方便信号与系统的时域分析, 根据冲激信号定义, 一般常采用将任意连续信号分解为无穷多连续冲激信号之和的方法, 即

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) \Delta\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (1-41)$$

这一部分的详细内容将在第 2 章中讨论。

4. 任意信号分解为实分量与虚分量之和

根据所讨论问题的需要, 常常需要对信号进行实、虚分量的分解。例如, 讨论连续及离散时域信号的频谱时, 常可利用该分解形式。一般来说信号的实虚分解可用下式来表示。设 $x_r(t)$ 表示信号 $x(t)$ 的实部, $x_i(t)$ 表示信号 $x(t)$ 的虚部, 则有

$$x(t) = x_r(t) + jx_i(t) \quad (1-42)$$

5. 任意信号表示为正交函数分量之和

依据数学理论,任意信号 $x(t)$ 既可表示为三角函数集合的形式也可表示为复指数函数集合的形式。因为这两种集合的形式都属于正交函数集合的形式。其表达式为

三角函数集合形式:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t + \phi_n) \quad (1-43)$$

复指数函数集合形式:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \quad (1-44)$$

这种分解形式将在第3章中作详细讨论。

1.6 系统的模型

所谓系统,广义地说就是一个将输入和输出联系起来的物理过程的数学模型,即完成从实际输入到输出转换的模式。例如,常见的“4C”系统即通信系统、控制系统、计算机系统和指挥系统。广义系统的定义可以用简单的方框图来表示,如图1-19所示。图中, $x(t)$ 表示系统输入信号, $y(t)$ 表示系统输出信号。整个系统的作用就是完成从输入 $x(t)$ 到输出 $y(t)$ 的转换。图1-19所示系统框图的数学模型即为

$$y(t) = T[x(t)] \quad (1-45)$$

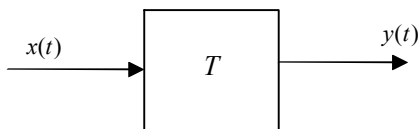


图 1-19 系统框图

科学的每一分支都有自己的一套“模型”理论,在模型的基础上可以运用数学工具进行研究。为便于对系统进行分析,同样需要建立系统的模型。所谓模型,是系统物理特性的数学抽象,以数学表达式或具有理想特性的符号组合图形来表征系统特性。

例如,由电阻器、电容器和线圈组合而成的串联回路,可抽象表示为如图1-20所示的 R 、 L 、 C 串联回路模型。一般情况下,可以认为 R 代表电阻器的阻值, C 代表电容器的容量, L 代表线圈的电感量。若激励信号是电压源 $e(t)$, 欲求解电流 $i(t)$, 由元件的理想特性与 KVL 可以建立如下的微分方程式

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{de}{dt} \quad (1-46)$$

这就是电阻器、电容器与线圈串联组合系统的数学模型。在电子技术中经常用到的理想特性元件模型还有互感器、回转器、各种受控源、运算放大器等,它们的数学表示和符号图形在电路分析基础课程中都已述及,此处不再重复。

系统模型的建立是有一定条件的,对于同一物理系统,在不同条件下,可以得到不同形式的数学模型。严格来说,只能得到近似的模型。例如,刚刚建立的图1-20所示的电路模型

与式(1-46)只是在工作频率较低,而且线圈、电容器损耗相对很小情况下的近似。如果考虑电路中的寄生参量,如分布电容、引线电感和损耗,而且工作频率较高,则系统模型会变得十分复杂,图1-20与式(1-46)就不能应用。工作频率更高时,将无法再用集总参数模型来表示此系统,需采用分布参数模型。

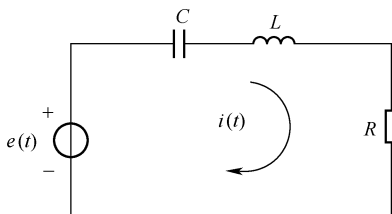


图 1-20 R 、 L 、 C 串联回路模型

从另一方面讲,对于不同的物理系统,经过抽象和近似,有可能得到形式上完全相同的数学模型。即使对于理想元件组成的系统,在不同电路结构情况下,其数学模型也有可能一致。例如,根据网络对偶理论可知,一个 G (电导)、 C (电容)、 L (电感) 组成的并联回路,在电流源激励下求其端电压的微分方程将与式(1-46)形式相同。此外,还能够找到对应的机械系统,其数学模型与这里的电路方程也完全相同。

对于较复杂的系统,其数学模型可能是一个高阶微分方程,规定此微分方程的阶次就是系统的阶数,例如,图1-20的系统是二阶系统。也可以把这种高阶微分方程改为一阶联立方程组的形式给出,这是同一个系统模型的两种不同表现形式,前者称为输入—输出方程,后者称为状态方程,它们之间可以相互转换。

建立数学模型只是进行系统分析工作的第一步,为求得给定激励条件下系统的响应,还应当知道激励接入瞬时系统内部的能量储存情况。储能的来源可能是先前激励(或扰动)作用的后果,没有必要追究详细的历史演变过程,只需知道激励接入瞬时系统的状态。系统的起始状态由若干独立条件给出,独立条件的数目与系统的阶次相同,例如图1-20所示的电路,其数学模型是二阶微分方程,通常以起始时刻电容端电压与电感电流作为两个独立条件表征它的起始状态。

如果系统数学模型、起始状态以及输入激励信号都已确定,即可运用数学方法求解其响应。一般情况下可以对所得结果作出物理解释,赋予物理意义。综上所述,系统分析的过程,是从实际物理问题抽象出数学模型,经数学解析后再回到物理实际的过程。

1.7 系统的分类

1.7.1 连续时间系统与离散时间系统

连续时间系统是指输入、输出及状态量都是时间 t 的连续函数,即能够完成由一种连续信号转换成另一种连续信号的数学模型。这种数学模型就是微分方程,如模拟通信系统。

离散时间系统是指输入、输出都是离散的变量 n (n 为整数集合),即将一种离散信号转换成另一种离散信号的数学模型。而离散系统的数学模型是差分方程,如数字计算机系统。

1.7.2 即时系统与动态系统

若系统响应信号只取决于同时刻的激励信号，而与它过去的工作状态（历史）无关则为无记忆系统，即即时系统。如仅由电阻元件所组成的系统（只需用代数方程来描述）。

若系统响应信号不仅取决于同时刻的激励信号，而且与它过去工作状态有关，则为动态系统，它记载着曾经发生过的信息，例如电容、电感、磁芯等。动态系统数学模型是微分方程或差分方程。

1.7.3 集总参数系统与分布参数系统

只由集总参数元件组成的系统称为集总参数系统；含有分布参数元件的系统是分布参数系统（如传输线、波导等）。集总参数系统用常微分方程作为它的数学模型，而分布参数系统的数学模型是偏微分方程，这时描述系统的独立变量不仅是时间变量，还要考虑到空间位置。

1.7.4 线性系统与非线性系统

具有叠加性与均匀性（也称齐次性，homogeneity）的系统称为线性系统。所谓叠加性是指当几个激励信号同时作用于系统时，总的输出响应等于每个激励单独作用所产生响应之和；而均匀性的含义是，当输入信号乘以某常数时，响应也倍乘相同的常数。不满足叠加性或均匀性的系统是非线性系统。

1. 齐次性

设激励信号为 $x(t)$ ，经系统产生的响应为 $y(t)$ ，则当激励信号扩大或缩小 a 倍时，其响应也随之扩大或缩小 a 倍，即

$$T[x(t)] = y(t) \Rightarrow T[ax(t)] \overset{T}{\rightarrow} ay(t) \quad (1-47)$$

2. 叠加性

设激励信号 $x_1(t)$ 作用于线性系统，产生响应 $y_1(t)$ ；又设激励信号 $x_2(t)$ 作用于同一系统，产生响应 $y_2(t)$ ，则当两个激励信号同时作用于该系统时，其响应为两个分别响应之和，即

$$\begin{aligned} y_1(t) &= T[x_1(t)] \\ y_2(t) &= T[x_2(t)] \\ y(t) &= y_1(t) + y_2(t) = T[x_1(t) + x_2(t)] \end{aligned} \quad (1-48)$$

综合考虑式（1-47）及式（1-48），有

$$\begin{aligned} y_1(t) &= T[x_1(t)] \\ y_2(t) &= T[x_2(t)] \end{aligned}$$

则

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] \quad (1-49)$$

式（1-49）表示了线性系统必须同时满足齐次性和叠加性。

对于线性系统而言，任何响应都可分解为两部分：一部分由外界激励作用引起的零状态响应；另一部分由特殊激励（初始状态）引起的零输入响应，即

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) \quad (1-50)$$

其中零状态响应 $y_{zs}(t)$ 满足零状态线性；零输入响应 $y_{zi}(t)$ 满足零输入线性。

1.7.5 时变系统与非时变系统

时变系统是指系统参数随时间变化。例如，由可变电容所组成的电路系统就是时变系统，描述这种系统的数学模型应是变系数微分方程或变系数差分方程。

非时变系统的重要性质就是系统参数不随时间而改变。描述这种系统的数学模型应是常系数微分方程或常系数差分方程。

设有连续非时变系统，若激励 $x(t)$ 经该系统产生的响应是 $y(t)$ ，即

$$y(t) = T[x(t)]$$

则

$$y(t - \tau) = T[x(t - \tau)] \quad (1-51)$$

也就是当输入延迟 $x(t - \tau)$ 后系统引起的响应也应延迟 $y(t - \tau)$ 。

对于非时变系统其输入与输出信号之间所满足的关系如图 1-21 所示。

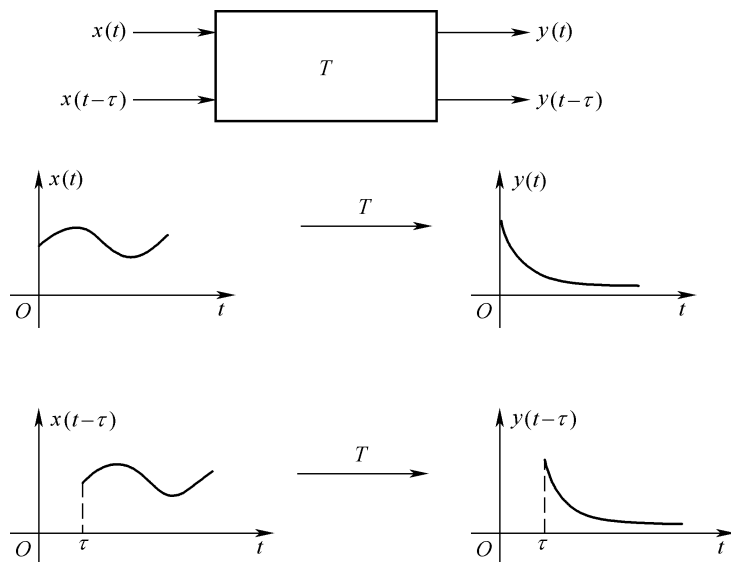


图 1-21 非时变系统输入与输出信号关系

由此可知，只要初始状态不变，非时变系统的响应形式仅取决于输入形式，而与输入的时间起点无关。

例 1-2 判断下列系统是否为线性非时变系统：

(1) $y(t) = \cos[x(t)]$;

(2) $y(n) = nx(n)$ 。

解 (1) 设输入信号分别为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ ，相应的输出为 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ ，则

$$y_1(t) = T[x_1(t)] = \cos[x_1(t)], \quad y_2(t) = T[x_2(t)] = \cos[x_2(t)]$$

当输入为 $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ 时，相应的输出为

$$y_3(t) = T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \cos[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] \neq \alpha \cos[x_1(t)] + \beta \cos[x_2(t)]$$

即 $y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$ ，故该系统为非线性系统。

又设输入延迟时间为 τ ，则相应输出为 $y_4(t) = \cos[x(t - \tau)] = y(t - \tau)$ ，故该系统为非时变系统。

(2) 同理，根据线性系统性质可判断系统 $y(n) = nx(n)$ 为线性系统。

此外，按非时变系统定义，当输入信号为 $x_1(n)$ 时，其输出为 $y_1(n) = nx_1(n)$ ，若该系统为非时变系统，就应有 $y_1(n - n_0) = (n - n_0)x_1(n - n_0)$ 。那么设输入为 $x_2(n) = x_1(n - n_0)$ 时，相应的输出为 $y_2(n) = nx_1(n - n_0)$ ，显然 $y_2(n) \neq y_1(n - n_0)$ ，故该系统为时变系统。

1.7.6 可逆系统与不可逆系统

若系统在不同激励信号作用下产生不同的响应，则称此系统为可逆系统。对于每个可逆系统都存在一个“逆系统”，当原系统与此逆系统级联组合后，输出信号与输入信号相同。

例如，输出 $y_1(t)$ 与输入 $x_1(t)$ 具有如下约束的系统是可逆的。

$$y_1(t) = 5x_1(t) \quad (1-52)$$

此可逆系统的逆系统输出

$$y_2(t) = \frac{1}{5}x_2(t) \quad (1-53)$$

不可逆系统的一个实例为

$$y_3(t) = x_3^2(t) \quad (1-54)$$

显然无法根据给定的输出 $y_3(t)$ 来决定输入 $x_3(t)$ 的正、负号，即不同的激励信号产生了相同的响应，因而它是不可逆的。

可逆系统的概念在信号传输与处理技术领域中得到广泛的应用。例如，在通信系统中，为满足某些要求可将待传输信号进行特定的加工（如编码），在接收信号之后仍要恢复原信号，此编码器应当是可逆的。这种特定加工的一个实例：如在发送端为信号加密，在接收端需要正确解密。

1.7.7 因果与非因果系统

若系统的激励与响应是一种因果关系，即激励是产生响应的原因，响应便是激励引起的结果，那就说明系统任何时刻的响应只取决于激励现在与过去值，而不取决于激励的将来值。

非因果系统则表示这种因果关系不成立，说明系统的响应发生在激励之前，没有激励就有响应。非因果系统是一种理想化系统，是不可实现系统。

例 1-3 试判断下列系统是否为因果系统：

(1) $y(t) = 3x(t - 3)$ ；

(2) $y(t) = x(2 - t)$ 。

解 (1) 由系统模型可知，该系统 t_0 时刻产生的响应是 t_0 以前的输入 $x(t_0 - 3)$ 的响应，该系统的响应发生在激励之后，所以它是因果系统。

(2) 由已知的系统模型，设该系统在 $t_0 = 0$ 的响应为 $y(0) = x(2)$ ，显然该响应与输入 $x(2)$ 有关，这说明系统的响应在前，激励在后，激励没进到系统就已经有响应了，所以该系统为非因果系统。

1.7.8 稳定系统与非稳定系统

所谓稳定系统，是指对于有限（有界）激励只能产生有限（有界）响应的系统。这里的有限激励也包括激励为零的情况。换言之，对于一个稳定系统，若激励函数为

$$|x(t)| \leq M_x, \quad 0 \leq t < \infty$$

则响应函数为

$$|y(t)| \leq M_y, \quad 0 \leq t < \infty$$

1.8 系统分析方法

在系统分析中，线性连续时不变系统（LTI）的分析具有重要意义。这不仅是因为在实际应用中经常遇到 LTI 系统，而且，还有一些非线性系统或时变系统在限定范围与指定条件下，遵从线性时不变特性的规律；另一方面，LTI 系统的分析方法已经形成了完整且严密的体系，日趋完善和成熟。

为便于读者了解本书概貌，下面就系统分析方法作一概述，着重说明 LTI 系统的分析方法。

在建立系统模型方面，系统的数学描述方法可分为两大类型，一是输入—输出描述法，另一是状态变量描述法。

输入—输出描述法着眼于系统激励与响应之间的关系，并不关心系统内部变量的情况。对于在通信系统中大量遇到的单输入—单输出系统，应用这种方法较为方便。

状态变量描述法不仅可以给出系统的响应，还可以提供系统内部各变量的情况，也便于多输入—多输出系统的分析。在近代控制系统的理论研究中，广泛采用状态变量描述法。

从系统数学模型的求解方法来讲，大体上可分为时间域方法与变换域方法两大类型。

时间域方法直接分析时间变量的函数，研究系统的时间响应特性，或称时域特性。这种方法的主要优点是物理概念清楚。对于输入—输出描述的数学模型，可以利用经典法解常系数线性微分方程或差分方程，辅以算子符号方法可使分析过程适当简化；对于状态变量描述的数学模型，则需要求解矩阵方程。在线性系统时域分析方法中，卷积方法最受重视，它的优点表现在许多方面。在信号与系统研究的发展过程中，曾一度认为时域方法运算繁琐、不够方便，随着计算机技术与各种算法工具的出现，时域分析又重新受到重视。

变换域方法将信号与系统模型的时间变量函数变换成相应变换域的某种变量函数。例如，傅里叶变换（FT）以频率为独立变量，以频域特性为主要研究对象；而拉普拉斯变换（LT）与 Z 变换（ZT）则注重研究极点与零点分析，利用 S 域或 Z 域的特性解释现象和说明问题。目前，在离散系统分析中，正交变换的内容日益丰富，如离散傅里叶变换（DFT）、离散沃尔什变换（DWT）等等。为提高计算速度，人们对快速算法产生了巨大兴趣，又出现了如快速傅里叶变换（FFT）等计算方法。变换域方法可以将时域分析中的微分、积分运算转化为代数运算，或将卷积积分变换为乘法。在解决实际问题时又有许多方便之处，例如根据信号占有频带与系统通带间的适应关系来分析信号传输问题，往往比时域法简便和直观。在信号处理问题中，经正交变换，将时间函数用一组变换系数（谱线）来表示，在允许一定误差的情况下，变换系数的数目可以很少，有利于判别信号中带有特征性的分量，也便于传输。

LTI 系统的研究,以叠加性、均匀性和时不变特性作为分析一切问题的基础。按照这一观点去考察,时间域方法与变换域方法并没有本质区别。这两种方法都是把激励信号分解为某种基本单元,在这些单元信号分别作用的条件下求得系统的响应,然后叠加。例如,在时域卷积方法中这种单元是冲激函数,在傅里叶变换中是正弦函数或指数函数,在拉普拉斯变换中则是复指数信号。因此,变换域方法不仅可以视为求解数学模型的有力工具,而且能够赋予明确的物理意义,基于这种物理解释,时间域方法与变换域方法得到了统一。

本书按照先输入—输出描述后状态变量描述,先连续后离散,先时间域后变换域的顺序,研究线性时不变系统的基本分析方法,结合通信系统与控制系统的一般问题,初步介绍这些方法在信号传输与处理方面的简单应用。

长期以来,人们对于非线性系统与时不变系统的研究付出了足够的代价,虽然取得了不少进展,而目前仍有较多困难,还不能总结出系统、完整、具有普遍意义的分析方法。近年来,在信号传输与处理研究领域,人们利用人工神经网络、模糊集理论、遗传算法、混沌理论以及它们的相互结合解决了线性时不变系统模型难以描述的许多实际问题,取得了令人满意的结果,这些方法显示了强大的生命力,它们的构成原理和处理问题的方法与本课程的基本内容有着本质的区别。随着本课程与后续课程的深入学习,读者将逐步认识到本书方法的局限性。科学发展日新月异,信号与系统领域的新理论、新技术层出不穷,对于这一科学领域的学习将永无止境。

本章讨论了有关信号与系统的一些基本概念和重要性质,介绍了一些常用信号及信号的基本运算。这些都是信号与系统分析的重要基础。

习题 1

1-1 分别判断如图 1-22 所示各波形是连续时间信号还是离散时间信号,若是离散时间信号是否为数字信号?

1-2 说明下列信号是周期信号还是非周期信号。若是周期信号,试求其周期 T 。

(1) $a \sin t - b \sin 3t$;

(2) $a \sin 4t + b \cos 7t$;

(3) $a \sin 3t + b \cos \pi t, \pi = 3$ 和 $\pi \approx 3.141\cdots$;

(4) $a \cos \pi t + b \sin 2\pi t$;

(5) $a \sin \frac{5t}{2} + b \cos \frac{6t}{5} + c \sin \frac{t}{7}$;

(6) $(a \sin 2t)^2$;

(7) $(a \sin 2t + b \sin 5t)^2$ 。

提示:如果含有 n 个不同频率余弦分量的复合信号是一个周期为 T 的周期信号,则其周期 T 必为各分量信号周期 $T_i (i=1,2,3,\cdots,n)$ 的整数倍。即有

$$T = m_i T_i \quad \text{或} \quad \omega_i = m_i \omega$$

式中 $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$ 为各余弦分量的角频率, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 为复合信号的基波频率, m_i 为正整数。

因此只要能找到 n 个不含整数公因子的正整数 $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$, 使

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \cdots : \omega_n = m_1 : m_2 : m_3 : \cdots : m_n$$

成立,就可判定该信号为周期信号,其周期为

$$T = m_i T_i = m_i \frac{2\pi}{\omega_i}$$

如果复合信号中某分量频率为无理数, 则该信号称为概周期信号。概周期信号是非周期信号, 但如果选用某一有理数频率来近似表示无理数频率, 则该信号也可视为周期信号。所选的近似值改变, 则该信号的周期也随之变化。例如, $\cos t + \cos \sqrt{2}t$ 的信号, 如令 $\sqrt{2} \approx 1.41$, 则可求得 $m_1 = 100$, $m_2 = 141$, 该信号的周期为 $T = 200\pi$ 。如令 $\sqrt{2} \approx 1.414$, 则该信号的周期变为 2000π 。

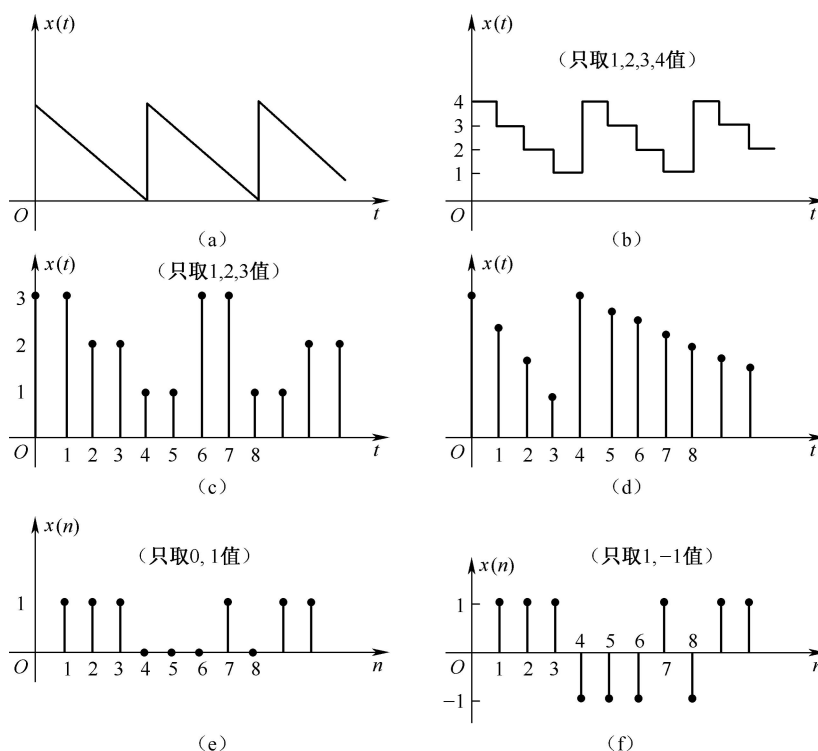


图 1-22 题 1-1 图

1-3 试说明下列信号中哪些是周期信号, 哪些是非周期信号; 哪些是能量信号, 哪些是功率信号。并计算它们的能量或平均功率。

- (1) $x(t) = \frac{1}{2} \cos 3t$;
- (2) $x(t) = \begin{cases} 8e^{-4t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$;
- (3) $x(t) = 5 \sin 2\pi t + 10 \sin 3\pi t, \quad -\infty < t < \infty$;
- (4) $x(t) = 20e^{-10|t|} \cos \pi t, \quad -\infty < t < \infty$;
- (5) $x(t) = \cos 5\pi t + 2 \cos 2\pi^2 t, \quad -\infty < t < \infty$ 。

1-4 试粗略绘出下列各函数式表示的信号波形。

- (1) $x(t) = 3 - e^{-t}, \quad t > 0$;

- (2) $x(t) = 5e^{-t} + 3e^{-2t}$, $t > 0$;
 (3) $x(t) = e^{-t} \sin 2\pi t$, $0 < t < 3$;
 (4) $x(t) = \frac{\sin at}{at}$;
 (5) $x(n) = (-2)^{-n}$, $0 < n \leq 6$;
 (6) $x(n) = e^n$, $0 \leq n < 5$;
 (7) $x(n) = n$, $0 < n < k$ 。

1-5 试写出图 1-23 (a)、(b)、(c) 所示各波形的函数式。

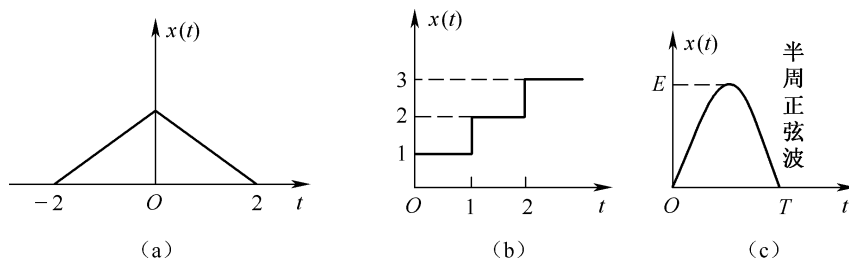


图 1-23 题 1-5 图

1-6 试绘出下列各时间函数的波形图，注意它们的区别。

- (1) $t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$;
 (2) $t \cdot \varepsilon(t-1)$;
 (3) $t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] + \varepsilon(t-1)$;
 (4) $(t-1)\varepsilon(t-1)$;
 (5) $-(t-1)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$;
 (6) $t[\varepsilon(t-2) - \varepsilon(t-3)]$;
 (7) $(t-2)[\varepsilon(t-2) - \varepsilon(t-3)]$ 。

1-7 试绘出下列各时间函数的波形图，注意它们的区别。

- (1) $x_1(t) = \sin(\omega t) \cdot \varepsilon(t)$;
 (2) $x_2(t) = \sin[\omega(t-t_0)] \cdot \varepsilon(t)$;
 (3) $x_3(t) = \sin(\omega t) \cdot \varepsilon(t-t_0)$;
 (4) $x_4(t) = \sin[\omega(t-t_0)] \cdot \varepsilon(t-t_0)$ 。

1-8 试应用冲激信号的抽样特性，求下列表示式的函数值

- (1) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\delta(t)dt$; (2) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t_0-t)\delta(t)dt$;
 (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\varepsilon\left(t-\frac{t_0}{2}\right)dt$; (4) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\varepsilon(t-2t_0)dt$;
 (5) $\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-t}+t)\delta(t+2)dt$; (6) $\int_{-\infty}^{\infty} (t+\sin t)\delta\left(t-\frac{\pi}{6}\right)dt$;
 (7) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}[\delta(t)-\delta(t-t_0)]dt$ 。

1-9 试完成下列信号的运算。

- (1) $(3t^2 + 2)\delta\left(\frac{t}{2}\right)$; (2) $e^{-3t}\delta(5-2t)$;
 (3) $\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)\delta\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$; (4) $e^{-(t-2)}\varepsilon(t)\delta(t-3)$ 。

1-10 已知 $x(t)$ 的波形, 为求 $x(t_0 - at)$, 应按下列哪种运算求得正确结果 (式中 t_0 , a 都为正值)?

- (1) $x(-at)$ 左移 t_0 ; (2) $x(at)$ 右移 t_0 ;
 (3) $x(at)$ 左移 $\frac{t_0}{a}$; (4) $x(-at)$ 右移 $\frac{t_0}{a}$ 。

1-11 已知信号 $x(t)$ 波形如图 1-24 所示, 试绘出下列函数的波形。

- (1) $x(2t)$; (2) $x(t)\varepsilon(t)$;
 (3) $x(t-2)\varepsilon(t)$; (4) $x(t-2)\varepsilon(t-2)$;
 (5) $x(2-t)$; (6) $x(-2-t)\varepsilon(-t)$ 。

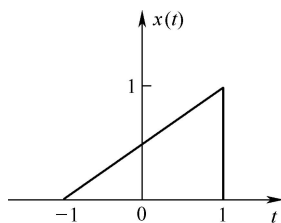


图 1-24 题 1-11 图

1-12 信号波形如图 1-25 所示, 试计算出这些信号的偶分量和奇分量, 并画出对应的波形图。

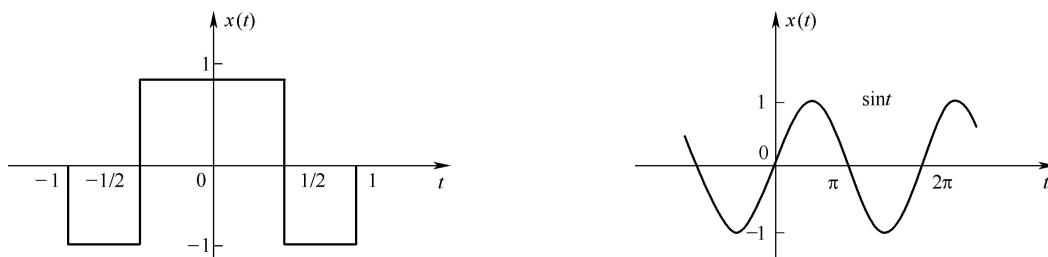


图 1-25 题 1-12 图

1-13 已知信号波形如图 1-26 所示, 试画出 $x(t)$ 波形图。

1-14 已知信号波形如图 1-27 所示, 试画出 $x(t)$ 、 $\frac{dx(t)}{dt}$ 、 $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ 波形图。

1-15 已知信号波形如图 1-28 所示, 试画出 $x^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ 波形图。

1-16 已知信号波形如图 1-29 所示, 试画出 $\frac{d}{dt}\left[x\left(1 - \frac{1}{2}t\right)\right]$ 波形图。

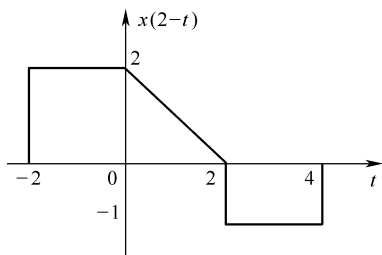


图 1-26 题 1-13 图

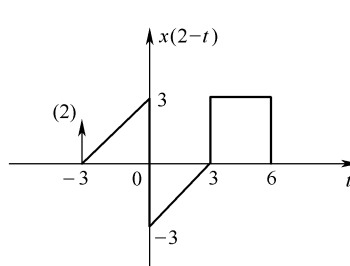


图 1-27 题 1-14 图

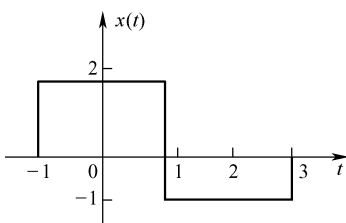


图 1-28 题 1-15 图

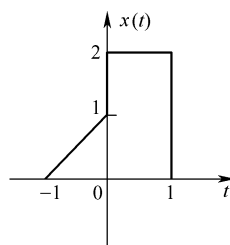


图 1-29 题 1-16 图

1-17 已知信号波形如图 1-30 所示, 试画出 $y_1(t) = x(t) \cdot x\left(1 - \frac{t}{2}\right)$ 及 $y_2(t) = x'(t) \cdot x(t)$ 的波形图。

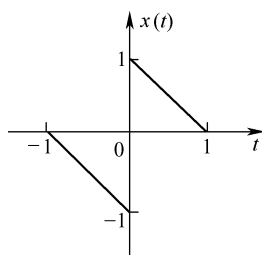


图 1-30 题 1-17 图

1-18 已知信号 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ 的波形如图 1-31 所示, 试求:

- (1) $x_1(t) \cdot x_2(t)$; (2) $x_1(-t) \cdot x_2(1-t)$;
(3) $x_1(2t) \cdot x_2\left(1 + \frac{t}{2}\right)$; (4) $x_1(t) \cdot x_2(-1-t)$ 。

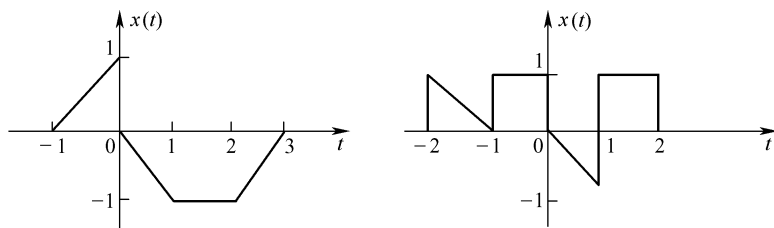


图 1-31 题 1-18 图

1-19 试判断下列系统是否为线性、时不变、因果的？

$$(1) \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt};$$

$$(2) \quad y(t) = x(t)\varepsilon(t);$$

$$(3) \quad y(t) = \sin[x(t)]\varepsilon(t);$$

$$(4) \quad y(t) = x(1-t);$$

$$(5) \quad y(t) = x(2t);$$

$$(6) \quad y(t) = x^2(t);$$

$$(7) \quad y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau;$$

$$(8) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{5t} x(\tau) d\tau。$$

1-20 某 LTI 连续系统具有一定的初始状态，已知激励为 $x(t)$ 时，全响应 $y_1(t) = e^{-t} + 2\cos\pi t, t > 0$ ；若初始状态不变，激励为 $2x(t)$ 时，全响应 $y_2(t) = 3\cos\pi t, t > 0$ 。求在同样初始状态条件下，如激励为 $3x(t)$ 时系统的全响应 $y_3(t)$ 。

1-21 试判断下列系统是否是可逆的。若可逆，给出它的逆系统；若不可逆，指出使该系统产生相同输出的两个输入信号。

$$(1) \quad y(t) = x(t-5);$$

$$(2) \quad y(t) = \frac{d}{dt}x(t);$$

$$(3) \quad y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau;$$

$$(4) \quad y(t) = x(2t)。$$

1-22 某 LTI 系统，当激励 $x_1(t) = \varepsilon(t)$ 时，响应 $y_1(t) = e^{-at}\varepsilon(t)$ ，试求当激励 $x_2(t) = \delta(t)$ 时，响应 $y_2(t)$ 的表示式（假定起始时刻系统无储能）。