第 1 章　质点运动学

机械运动是物体最简单、最基本的运动形式，研究机械运动及其规律的学科称为力学。力学是物理学的基础，也是工程技术的基础。当前力学已渗透到工程技术的众多领域，诸如土木工程、机械工程、交通工程、电气工程、航空航天工程等均以力学为基础。本教材的力学部分仅包括质点运动学、质点动力学、刚体定轴转动和机械振动等内容，是学习电磁学、热学等内容的基础，也是理工科各专业学习后继课程的基础，如理论力学、工程力学、材料力学、弹性力学、流体力学、结构力学等专业基础课程均以上述力学内容为基础。

力学可划分为运动学、动力学和静力学，运动学主要研究物体的空间位置随时间的变化规律，不涉及物体产生和改变运动的原因。本章重点介绍质点运动学的参照系、质点、坐标系等基本概念，以及描述质点运动的物理量：位置矢量、位移矢量、速度和加速度等，详细讨论质点的直线运动、抛体运动和圆周运动，最后简介质点的相对运动。在本章学习过程中，应重视高等数学的应用，尽快掌握坐标系的选取、矢量运算和微积分的运用，逐步提高解决物理问题的能力，为本课程和专业课程的学习奠定扎实的基础。

1.1　质点运动的描述

1.1.1　参照系 质点

大到绕恒星运行的行星，小到原子核外的电子云，高空呼啸而过的喷气客机、铁轨上飞驰的高速列车、海面上乘风破浪的舰艇，自然界处处可见运动的物体。物体的运动是绝对的，但对物体运动的描述却是相对的，即相对不同的参照物，对于同一物体运动的描述结果相异。为描述物体的运动而人为选择的参照物称为**参照系**。在讨论地面上或地球表面附近物体的运动时，一般选取地面为参照系较为方便。

质点是一种理想模型，为仅具有质量的几何点。当实际物体的形状和大小对其运动无影响或影响较小可以忽略不计时，即可将该物体视为质点，此举可以简化客观实际问题的处理。如讨论地球相对太阳的公转时，尽管地球的平均半径 $\overline{r} \sim 10^6$（m），但与地球距太阳的平均间距 $\overline{L} \sim 10^{11}$（m）以及太阳的平均半径 $\overline{R} \sim 10^8$（m）相比较仍是小量，对其运动的影响不大，故可将地球视为质点。任何理想模型均有其局限性和适用条件，应用过程中应当准确把握。

1.1.2　位置矢量 运动方程 位移

为了定量描述质点的运动，在选取参照系后，通常还要选取坐标系，并将该坐标系固定于所选参照系上。以下所述坐标系，如无特别声明，一般均指固定于地面的坐标系。如图 1.1 所示为在地面参照系固定的空间直角坐标系，位于空间 P 点一个质点的位置，可由 O 点向 P 点作一矢量 $\boldsymbol{r}$ 表示，称其为质点 P 的**位置矢量**，简称**位矢**。

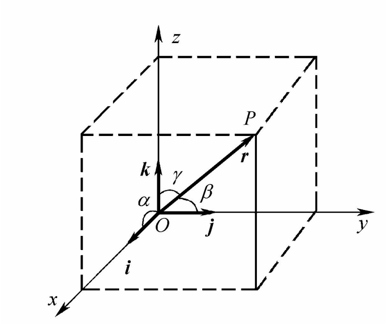

图 1.1　位置矢量

位矢在空间直角坐标系中可以表示为：

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1.1.1}$$

式中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为沿直角坐标 x、y、z 轴正向的单位矢量。位矢的大小和方向余弦分别为：

$$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.1.2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}，\cos\beta = \frac{y}{r}，\cos\gamma = \frac{z}{r} \tag{1.1.3}$$

质点的机械运动就是其空间位置随时间不断变化的过程，此时质点的位矢、直角坐标均为时间 t 的函数，称为**运动方程**，分别表示如下：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1.1.4a}$$

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.1.4b}$$

$$x = x(t)，\ y = (t)，\ z = (t) \tag{1.1.4c}$$

需要注意的是，（1.1.4a）式不涉及任何坐标系，而式（1.1.4b）和（1.1.4c）分别为式（1.1.4a）在空间直角坐标系中的矢量式和标量式。将运动方程的时间变量 t 消去，就可得到质点的**轨道方程**。如由式（1.1.4b）消去 t 可得到空间直角坐标系中质点的轨道方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y, z)$ 。运动方程为质点随时间变化的运动规律，包含了诸多质点运动学信息，是联系其他运动学物理量的桥梁。轨道方程则给出运动质点的轨迹，一般依据质点轨迹在所选坐标系中是直线或曲线而称其为直线运动或曲线运动。需要强调的是，运动方程和轨道方程均为质点运动学的重要方程。

如图 1.2 所示，经过 Δt 时间间隔，质点由 P 点运动到 Q 点，其经历的轨迹长度称为**路程** ΔS 。

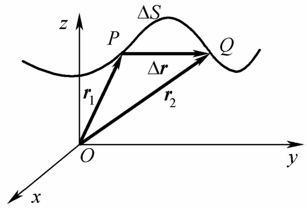

图 1.2　路程与位移

其位置变动可用由 P 点指向 Q 点的矢量表示，称之为对应 Δt 质点的**位移矢量**，简称**位移**，该物理量反应了 Δt 内质点位矢的变化，表示为：

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \Delta \boldsymbol{r} \tag{1.1.5}$$

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k} \tag{1.1.6}$$

式（1.1.6）为式（1.1.5）在空间直角坐标系的表示，可由式（1.1.1）得到。由式（1.1.6）结合图 1.2 可知，位移仅与质点的始末位置有关。

1.1.3　速度 加速度

速度是描述质点运动快慢及运动方向的物理量。如图 1.2 所示 Δt 内，质点由 P 点运动到 Q 点，对应位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ ，则 Δt 内质点的**平均速度**为：

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.1.7}$$

由上式可知，平均速度的方向与位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 相同，其大小为 Δt 内位矢的平均变化率。显然平均速度仅能粗略反应 Δt 内质点位矢的变化。如图 1.3 所示，若将 Δt 逐渐缩小并使之趋近于零，相应 $\Delta \boldsymbol{r}$ 也同时趋近于零，这时 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向趋近于 P 点的切线方向，于是得到平均速度的极限，称之为**瞬时速度**，简称**速度**，SI 单位为 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ，表示为：

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.8}$$

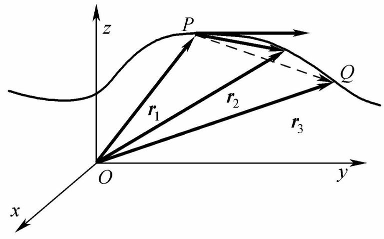

图 1.3　速度的方向

瞬时速度是矢量，可以精确反映质点的瞬时运动状态，任意时刻t，质点位于轨迹上某点速度的方向，即为该处曲线的切线方向，并指向质点运动的方向，如图 1.3 所示。只有当质点的位矢和速度同时被确定时，质点的运动状态才能被完全确定。因此，位矢和速度是描述质点运动状态的两个重要物理量。如式（1.1.8）所示，由位矢对时间变量求一次导数即可得到速度。

由式（1.1.1）及式（1.1.8），可以得到速度在空间直角坐标系的表达式及其大小分别为：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1.1.9}$$

$$|\boldsymbol{v}|=v=\sqrt{(v_x)^2+(v_y)^2+(v_z)^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1.1.10}$$

关于速度的方向，可以模仿位矢方向的表达式（1.1.3），写出其方向余弦表示。

若质点的速度随时间的变化而变化，则质点做变速运动，质点的曲线运动即为变速运动。**加速度**是描述质点的速度矢量随时间变化快慢的物理量。如图 1.2 所示，若在Δt内质点由P点运动到Q点，对应速度增量为$\Delta\boldsymbol{v}$，则Δt内质点的**平均加速度**为：

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1.1.11}$$

平均加速度只能描述在Δt内质点速度的平均变化。类似上述关于瞬时速度的讨论，对式（1.1.11）取极限即可得到**瞬时加速度**，简称**加速度**，SI 单位为$\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，表示为：

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.1.12}$$

由式（1.1.9）、式（1.1.12）可以得到加速度矢量在空间直角坐标系中的表达式及其大小分别为：

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \tag{1.1.13}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}|=a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}&=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}\end{aligned} \tag{1.1.14}$$

同理，也可模仿式（1.1.3）位矢的方向表示，写出加速度的方向余弦表示。如式（1.1.12）所示，由速度对时间变量求一次导数，或由位矢对时间变量求两次导数均可得到加速度。因此，对于运动学此类已知运动方程求速度、加速度的问题，可用求导方法处理。

例题 1.1.1 设高空中庞大的积雨云相对地面静止，一雨滴自该云层自由下落，其运动方程如下：

$$y = gc(c\mathrm{e}^{-\frac{t}{c}} + t - c)$$

其中 g 为重力加速度的数值、c 为大于零的常量，试求任意时刻该雨滴下落的速度和加速度（SI 单位）。

解：由题意知，相对于云层，雨滴的自由下落可视为质点直线运动问题，而且已知雨滴一维直角坐标系中的运动方程，故应用求导方法可解。由运动方程知，已选定云层雨滴下落处为坐标原点，垂直地面向下为 y 轴正方向。将所给运动方程带入式（1.1.9）和式（1.1.13），直接对时间变量求导得：

$$\boldsymbol{v} = v_y \boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = gc(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{c}})\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

$$\boldsymbol{a} = a_y \boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} = \left(g - \frac{v_y}{c}\right)\boldsymbol{j}\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

由所得结果可知，下落雨滴的速度始终沿 y 轴向下，且其数值随时间变量 t 的增加而增加，其极大值为 $v_{\max} = gc$。雨滴下落的加速度也始终沿 y 轴向下，但随时间 t 的增加而减小，其极小值为 $a_{\min} = 0$。请思考，若选地面参照系，以竖直向上一维直角坐标系求解此类问题，又有何结果？

例题 1.1.2 一架波音 787 客机以 $\boldsymbol{v}_0$ 匀速直线滑行进入起飞跑道，t_0 时刻又以 $\boldsymbol{a}_0$ 匀加速进入起飞状态，试求该客机地面滑行速度随时间的变化关系，以及其地面加速后的行驶距离与时间的关系（SI 单位）。

解：本题若选机场跑道为参照系，又选其直线行驶方向为一维直角坐标轴正方向，则客机的地面滑行可视为质点直线运动，于是该问题为已知质点加速度及初始条件的匀加速直线问题，则对应的矢量可用标量替代。请注意此类已知质点加速度及初始条件求其他物理量的问题，是已知运动方程求其他物理量问题的逆问题，可应用积分方法求解。选取如图 1.4 所示坐标系，取客机出发处为坐标原点，t_0 时刻对应坐标 x_0，则有：

$$\boldsymbol{v}_0 = v_0 \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{a}_0 = a_0 \boldsymbol{i}$$

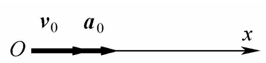

图 1.4　一维坐标系

于是由式（1.1.9）、式（1.1.13）得到：

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = a\boldsymbol{i} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} \Rightarrow a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Rightarrow a_0\mathrm{d}t = \mathrm{d}v$$

$$\therefore \quad \int_{t_0}^{t} a_0 \mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v \Rightarrow v(t) = [a_0(t - t_0) + v_0]\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

上式即为客机地面滑行速度随时间的变化关系。

又∵ $$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=v_x\boldsymbol{i}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}\Rightarrow v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Rightarrow v_x\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$$

∴ $$\int_{t_0}^{t}v_x\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}\left[a_0(t-t_0)+v_0\right]\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x\Rightarrow$$

$$x(t)=x_0+a_0\left[\frac{1}{2}(t^2+t_0^2)-t_0t\right]+v_0(t-t_0)\Rightarrow$$

$$x(t)-x_0=a_0\left[\frac{1}{2}(t^2+t_0^2)-t_0t\right]+v_0(t-t_0)\quad（\mathrm{m}）$$

上式即为客机地面加速后的行驶距离与时间的关系。请注意上述定积分中的积分上、下限，分别对应初始条件：$t=t_0$，$x=x_0$，$v=v_0$，及任意时刻：$t=t$，$x=x$，$v=v$。

其实本例题所得结果分别为质点匀加速直线运动在一维直角坐标系中的速度公式和运动方程。请思考，如何将上述结果应用于自由落体运动问题？

例题 1.1.3 已知地球相对太阳系某定点 O 的运动为一平面曲线运动，若将其视为质点并仅考虑太阳的影响，其运动方程为：

$$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(b\sin t)\boldsymbol{j}$$

其中 a、b 均为常量，试求地球相对定点 O 的速度、加速度及轨道方程（SI 单位）。

解：本题是以太阳系某定点 O 为参照系讨论地球运动的问题。由题意知，地球相对定点 O 的运动可分解为沿横、纵坐标轴的两个一维运动，而给出的运动方程是在平面直角坐标系中的表达式。由题意知：已设定太阳系某定点 O 为坐标系原点，于是由式（1.1.9）、式（1.1.13），直接应用求导方法得：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=(-a\sin t)\boldsymbol{i}+(b\cos t)\boldsymbol{j}\quad（\mathrm{m\cdot s^{-1}}）$$

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}=-(a\cos t)\boldsymbol{i}-(b\sin t)\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{r}\quad（\mathrm{m\cdot s^{-2}}）$$

由所给运动方程的矢量式又可得到：

$$x(t)=a\cos t，y(t)=b\sin t$$

于是由上式消去时间变量得轨道方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

上式表明，地球相对太阳系某定点 O 的运动轨迹是一椭圆曲线。事实上，由于地球同时受到太阳和月球的影响，地球相对太阳的运动轨迹与椭圆曲线稍有偏离，称其为蛇形线。

1.2 质点的曲线运动

质点的曲线运动属于运动学较复杂的问题，为了方便讨论，可以选择不同的坐标系处理。以下将选用平面直角坐标系和自然坐标系，讨论两种常见的质点平面曲线运动。

1.2.1 抛体运动

若忽略空气阻力及物体的形状和大小，且选取地面为参照系，则诸多物体在地球表面附近的运动，均可视为质点的**抛体运动**，如发射的枪弹，投掷的手榴弹，抛出的铅球、篮球和踢出的足球，受到击打的乒乓球、排球和高尔夫球等。此类质点运动的特点是：质点的加速度为重力加速度，且为常矢量，质点的运动轨迹为抛物线。此类质点匀加速运动问题是较为简单的二维曲线问题，通常选用平面直角坐标系处理。如图 1.5 所示，质点的抛体运动，可以分解为沿横、纵坐标轴的两个相互垂直的直线运动。设其初始条件为：$t=0$，$x=0$，$y=0$，$v=v_0$，且 $\boldsymbol{a}=-g\boldsymbol{j}$，质点的初速度与 x 轴的正向夹角为 θ。这是已知质点加速度、初始条件求其他物理量的问题，参考例题 1.1.2、1.1.3，得到质点的抛体运动方程和速度为：

$$x(t)=v_0 t\cos\theta,\ \ y(t)=tv_0\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2 \tag{1.2.1}$$

$$v_x=v_0\cos\theta,\ \ v_y=v_0\sin\theta-gt \tag{1.2.2}$$

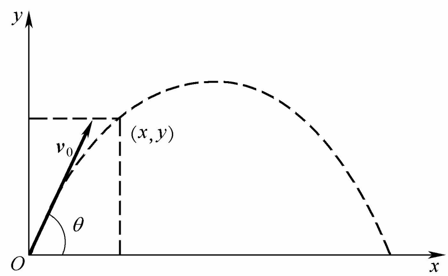

图 1.5 质点的斜抛运动

由运动方程（1.2.1）式消去时间 t 得到质点抛体运动的轨道方程为：

$$y=x\tan\theta-\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2 \tag{1.2.3}$$

式（1.2.3）表明，忽略空气阻力作用，质点的轨迹为抛物线。由式（1.2.3）令 $y=0$ 得到抛体运动质点的水平射程为：

$$d_0=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} \tag{1.2.4}$$

由上式出发，还可以讨论水平射程的极值问题。由于质点位于轨迹最高点时仅有水平速度，故有 $v_y = 0$ ，带入式（1.2.2）可得对应时间为：

$$t_H = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \tag{1.2.5}$$

将式（1.2.5）带入式（1.2.1）得抛体运动质点的射高为：

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \tag{1.2.6}$$

以上讨论的是质点的斜抛问题，若令以上诸式的 $\theta = 0$ 或 $\pm\dfrac{\pi}{2}$ ，则分别对应质点的平抛问题、竖直上抛和竖直下抛问题。

应用式（1.2.1）～式（1.2.6），可以对发射的枪弹、投掷的手榴弹和踢出的足球等抛体问题进行详细地讨论，例如，篮球、手榴弹投准问题的讨论就属于斜抛问题的应用。但是若考虑空气阻力等因素对质点抛体问题的影响，其轨迹就要偏离抛物线，这就属于较复杂的质点平面曲线运动，例如，枪弹、炮弹的“弹道曲线问题”，就与上述不计空气阻力的质点抛体运动有所不同。

例题 1.2.1 若不计空气阻力，则高尔夫球在空中的运动方程如下式：

$$\boldsymbol{r} = t(v_0\cos\theta)\boldsymbol{i} + \left(tv_0\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j}$$

其中 v_0、θ、g 均为常量，试求其 t 时刻的速度、加速度（SI 单位）。

解：将高尔夫球视为质点，依题意作如图 1.5 所示的抛体运动图。由给出的运动方程知，高尔夫球在空中的运动可分解为沿横、纵坐标轴的两个一维运动，且本题属于质点斜抛问题。由于是已知平面直角坐标系中的运动方程求解质点的速度、加速度，故可应用求导方法处理。由所给运动方程，应用式（1.1.9）、式（1.1.13）可得：

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = [(v_0\cos\theta)\boldsymbol{i} + (v_0\sin\theta - gt)\boldsymbol{j}] \ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} = -g\,\boldsymbol{j} \ \ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

上述结果的第一式为 t 时刻高尔夫球在空中的速度，第二式则表明 t 时刻高尔夫球在空中的加速度是常矢量，方向沿 y 轴负方向，其中 g 即为重力加速度的数值。请参考本节抛体运动的内容深入思考本例题，将会得到更丰富的信息。

1.2.2 圆周运动

质点做平面曲线运动时，若其曲率中心、曲率半径均保持不变，质点的运动轨迹即为圆曲线，称为质点的**圆周运动**，此时质点的速度始终沿圆轨迹某点的切向。质点圆周运动是常见的质点平面曲线运动，也是研究质点复杂曲线运动和物体转动的基础，通常采用自然坐标系处理。设质点做平面曲线运动，在其轨迹上

任取一个起始点作为自然坐标系的原点 O，设时刻 t 质点位于轨迹上 P 点，如图 1.6 所示，规定切向坐标轴沿 P 点切向指向质点的运动方向，对应**切向单位矢量** $\boldsymbol{e}_t$，规定法向坐标轴指向轨迹的凹侧，对应**法向单位矢量** $\boldsymbol{e}_n$，任意时刻 t 对应质点的自然坐标用距离坐标原点的路程 s 表示，这样建立的坐标系称为**自然坐标系**。于是有：

$$s = s(t) \tag{1.2.7}$$

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_t = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t \tag{1.2.8}$$

$$\boldsymbol{a} = a_t\boldsymbol{e}_t + a_n\boldsymbol{e}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \tag{1.2.9}$$

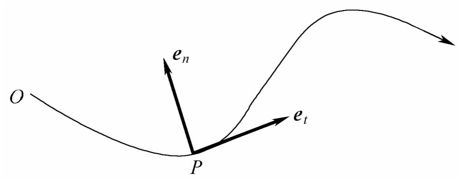

图 1.6　自然坐标系

式（1.2.7）～式（1.2.9）分别为质点的运动方程、速度和加速度在自然坐标系中的表达式。值得注意的是，式（1.2.9）的第一项为质点的**切向加速度，**是质点加速度沿切向的分量，第二项为质点的**法向加速度，**是质点加速度沿法向的分量。切向加速度反映速度的大小变化，法向加速度反映速度的方向变化。式（1.2.9）中的 ρ 为质点轨迹某点处的曲率半径。对于半径为 R 的质点圆周运动，令式（1.2.9）中的 $\rho = R$ 得到自然坐标中质点圆周运动的加速度为：

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_n \tag{1.2.10}$$

如图 1.7 所示质点做半径确定的圆周运动，其速度始终沿圆轨迹的切向并指向质点的运动方向，质点加速度的法向分量始终指向圆心，质点加速度的切向分量始终沿轨迹的切向，且依据 $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 的正负确定其沿 $\boldsymbol{e}_t$ 的正、负指向。

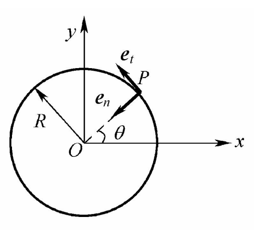

图 1.7　质点圆周运动

对于质点的圆周运动，可以采用位移、速度、加速度等线量描述，也可以采用角量描述，而且后者有其独到的方便之处。如图 1.7 所示，质点在平面直角坐标系中以原点 O 为圆心做半径 R 的圆周运动，设时刻 t 质点位于轨迹上的 P 点，其位矢与 x 轴的正向夹角 θ 称为**角坐标**，该物理量随时间的变化关系即为以角量描述的质点运动方程：

$$\theta=\theta(t) \tag{1.2.11}$$

对应 Δt，质点相对圆心 O 的**角位移**为 $\Delta\theta$，SI 单位为 rad（弧度），规定逆时针转向的角位移为正，顺时针转向的角位移为负。角位移对时间的变化率定义为**角速度**，SI 单位为 $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$。角速度对时间的变化率定义为**角加速度**，SI 单位为 $\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$。分别表示为：

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.2.12}$$

$$\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.2.13}$$

在自然坐标系中，质点圆周运动的运动方程可以表示为：

$$s=R\theta(t) \tag{1.2.14}$$

于是有：

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=R\omega \tag{1.2.15}$$

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\beta\text{，}\quad a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2 \tag{1.2.16}$$

式（1.2.14）～式（1.2.16）即为质点做平面圆周运动时线量与角量的关系，在第 4 章刚体定轴转动中有具体应用。

例题 1.2.2 一辆跑车在半径为 R 的圆跑道上试车，若其运动方程为 $s=at+bt^2$，其中 a、b 为常量（SI 单位），试求：

（1）将跑车的加速度在自然坐标中可表示为式（1.2.10）的形式；

（2）跑车 t 时刻的速度、加速度、角速度及角加速度。

解：本例题为已知运动方程求解其他物理量的问题。而问题（1）实际是求证质点圆周运动的加速度在自然坐标系可表示为式（1.2.10）。可以利用平面直角坐标系与自然坐标系联合求解问题（1）。首先将自然坐标系的单位矢量在直角坐标系中投影，然后利用加速度定义式得到结果。由式（1.2.14）～式（1.2.16）可知，将运动方程带入即可得到问题（2）的结果。

（1）如图 1.7 所示，将 $\boldsymbol{e}_t$、$\boldsymbol{e}_n$ 在平面直角坐标系投影得：

$$\boldsymbol{e}_t=-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{e}_n=-\cos\theta\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{j}$$

将上述第一式两边对时间求导得：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j})}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j})=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_n$$

于是由加速度定义式（1.1.13）及自然坐标中速度定义式（1.2.8）得：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(v\boldsymbol{e}_t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_n$$

对于质点圆周运动有 $s(t)=R\theta \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v=R\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

最后得到 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+v\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_n=\left[\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+\dfrac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_n\right]$ （$\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$）

（2）将运动方程带入式（1.2.15）、式（1.2.16）可得：

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=a+2bt \quad （\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}）$$

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2b,\ a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(a+2bt)^2}{R}\Rightarrow a=\sqrt{a_t+a_n}=\sqrt{4b^2+\frac{(a+2bt)^4}{R^2}} \quad （\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}）$$

$$\omega=\frac{v}{R}=\frac{a+2bt}{R} \quad （\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}），\ \beta=\frac{a_t}{R}=\frac{2b}{R} \quad （\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}）$$

由上述问题（1）的结果可知，质点做平面曲线运动时，其自然坐标系的切向、法向单位矢量$\boldsymbol{e}_t$、$\boldsymbol{e}_n$均为时间的函数。问题（2）的结果表明，跑车的切向加速度、角加速度均为常量，但跑车的法向加速度是时间的函数。

1.3 相对运动

相对于不同的参照系，对于同一物体运动的描述结果不同，此为物体运动描述的相对性。以下将讨论质点相对两个不同参照系的运动，以及运动描述结果间的联系，即相对不同参照系质点的位矢、速度和加速度等物理量以及相对不同参照系的物理量之间的关系。

设S系为**基本参照系**，S'系为**运动参照系**，S'相对基本参照系做直线运动。研究地面上或地球表面附近物体的运动时，常选取地面为基本参照系。将质点相对S的运动称为**绝对运动**，质点相对S'的运动称为**相对运动**，S相对S'的运动称为**牵连运动**。在参照系S、S'上分别建立空间直角坐标系，并设两坐标系对应坐标轴始终保持平行，如图 1.8 所示。位于空间点P的质点，在S、S'中的位矢分别为$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}'$，S'的O'点在S的位矢为$\boldsymbol{r}_0$，参考图 1.8 所示有：

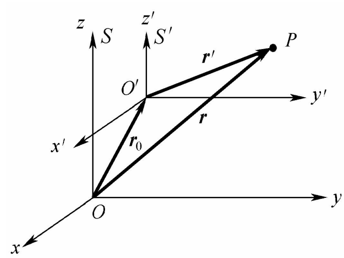

图 1.8 质点的相对运动

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}' \tag{1.3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}\Rightarrow \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_0 \tag{1.3.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}\Rightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a} \tag{1.3.3}$$

其中$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}$为质点相对$S$的速度，称为**绝对速度**，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}'$为质点相对$S'$的速度，称为**相对速度**，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}_0$为$S'$相对$S$的速度，称为**牵连速度**。$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}$为质点相对$S$的加速度，称为**绝对加速度**，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}'$为质点相对$S'$的加速度，称为**相对加速度**，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_0$为$S'$相对$S$的加速度，称为**牵连加速度**。式（1.3.2）给出的则是S、S'两个参照系中质点速度的变换关系，而式（1.3.3）给出的是在S、S'两个参照系中质点加速度的变换关系，若设S'系相对S系做匀速直线运动，则牵连加速度$\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{0}$，由式（1.3.3）得到：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}' \tag{1.3.4}$$

上式表明，相对基本参照系做匀速直线运动的参照系中，质点的加速度不变化，而此时式（1.3.2）称为伽利略速度变换式，即S'相对S做匀速直线运动时，两个参照系中质点速度的变换关系。

值得注意的是，在上述结果推导过程中，已默认物体的运动速度远远低于真空中的光速$c=3\times10^{8}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，同时以上结果的适用范围也仅局限于经典力学。

本章总结

将学习过的内容，经过深思，归纳、整理、总结，化为自己的东西，应用起来才能得心应手。以下提供的本章总结仅为给出的范例，建议尽快熟练掌握此类学习方法，通过自己的努力给出本课程每一章的总结。

（1）四类物理量：位置矢量、位移矢量、速度矢量、加速度矢量。

（2）三类基本运动：直线运动、曲线运动、相对运动。

（3）两类基本问题：第一类问题，由质点运动方程求质点t时刻的速度、加速度，可用求导方法；第二类问题，已知质点加速度及初始条件，求质点速度及运动方程，可用积分方法。

（4）两类方程：运动方程、轨迹方程。

习题 1

1.1 云室为记录带电粒子轨迹的仪器。当快速带电粒子射入云室时，在其经过的路径上产生离子，使过饱和蒸气以离子为核心凝结成液滴，从而可采用照相方法记录该带电粒子的轨迹。若设做直线运动带电粒子的运动方程为：

$x = C_1 - C_2 e^{-\alpha t}$（SI 单位），$C_1$、$C_2$、$\alpha$ 均为常量，并在粒子进入云室时计时，试描述其运动情况。

1.2　将牛顿管抽为真空且竖直于水平地面放置，如图 1.9 所示自管中 O 点向上抛射小球又落至原处用时 t_2，球向上运动经 h 处又下落至 h 处用时 t_1。现测得 t_1、t_2 和 h，试由此确定当地重力加速度的数值。

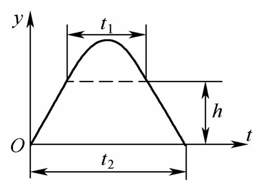

图 1.9　1.2 题用图

1.3　已知一颗小彗星相对太阳系某定点 O 的平面运动方程为 $x(t) = a\cos t$，$y(t) = b\sin t$（SI 单位），其中 a、b 均为大于零的常量。试求相对 O 点：（1）彗星的位置矢量；（2）彗星的轨道方程；（3）彗星的运行速度及加速度。

1.4　场地赛车由静止开始做直线运动，初始加速度为 a_0，每经过时间间隔 $\Delta t = \tau$ 后加速度增加 a_0，试求经过 t 秒后该赛车的速度及运动距离。

1.5　跳水运动员沿垂直泳池水面入水，取自水面竖直向下为 y 轴，设其入水后仅受水的阻碍而减速，加速度为 $a_y = -kv_y^2$，其中 v_y 为速度、k 为常量。若设运动员接触水面时的速率为 v_0，试求其入水后速度随时间的变化关系。

1.6　加农榴弹炮自山脚下向山坡上的目标开火，设山坡与地平面夹角为 α，试求发射角设置为多少时，沿山坡发射的炮弹射程最远？

1.7　列装我军的 PP93 式迫击炮，是山地步兵、海军陆战队和快速机动部队的理想压制火炮，具有重量轻、射程远和机动性好等优点。设 PP93 式迫击炮以 45° 发射角发射，炮弹的初速率 v_0=90（$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$），而且在与发射点同一水平面上落地爆炸。不计空气阻力，试求其在最高点和落地点运动轨迹的曲率半径。

1.8　狙击手由摩天大楼 36 层以水平初速 v_0 射击目标，若取枪口为坐标原点，沿初速度方向为 x 轴正向，竖直向下为 y 轴正向，取击发时 $t = 0$，试求：

（1）子弹 t 时刻的坐标及轨道方程；

（2）子弹 t 时刻的速度及切向、法向加速度。

1.9　BJ-212 吉普车在半径 200（m）的圆弧形公路上进行刹车试验，刹车开始阶段其运动方程 $s = 20t - 0.2t^3$（单位：m），试求该越野车在 $t = 1$（s）时的加速度。

1.10　山地车运动员骑自行车向正东而行，当其行驶速度为 10（$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$）时感觉是南风，但当其行驶速度增至 15（$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$）时感觉是东南风，试求风速。