

第 4 章 不定积分

在第 2 章中, 我们讨论了如何求一个函数的导函数问题. 本章将讨论它的反问题, 即要寻求一个可导函数, 使它的导函数等于已知函数. 这是积分学的基本问题之一.

4.1 不定积分的概念与性质

1. 原函数与不定积分的概念

定义 4.1 如果在区间 I 上, 可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$, 即对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx,$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数.

例如, 因为在 $(-\infty, +\infty)$ 内, $(\sin x)' = \cos x$, 故在 $(-\infty, +\infty)$ 内, $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数;

又如, 在 $(1, +\infty)$ 内, $\left[\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, 所以, 在 $(1, +\infty)$ 内

$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ 是 $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ 的一个原函数.

原函数存在定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x)$$

简单地说就是: 连续函数一定有原函数.

下面还要说明两点:

第一, 如果 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数, 即有一个函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$, 都有 $F'(x) = f(x)$, 那么, 对任何常数 C , 显然也有

$$[F(x) + C]' = f(x),$$

即对任何常数 C , 函数 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的原函数, 这说明, 如果 $f(x)$ 有一个原函数, 那么 $f(x)$ 就有无限多个原函数.

第二, 如果在区间 I 上 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 那么 $f(x)$ 的其他原函数与 $F(x)$ 有什么关系?

设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的另一个原函数, 即对任一 $x \in I$ 有

$$\Phi'(x) = f(x)$$

于是

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

在第 3 章 3.1 节中已经知道, 在一个区间上导数恒为零的函数必为常数, 所以

$$\Phi(x) - F(x) = C_0 \quad (C_0 \text{ 为某个常数})$$

这表明 $\Phi(x)$ 与 $F(x)$ 只差一个常数, 因此, 当 C 为任意常数时, 表达式

$$F(x) + C$$

就可表示 $f(x)$ 的任意一个原函数. 也就是说, $f(x)$ 的全体原函数所组成的集合, 就是函数族

$$\{F(x) + C \mid -\infty < C < +\infty\}$$

定义 4.2 在区间 I 上, 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分, 记作

$$\int f(x) dx$$

其中记号 $\int$ 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量.

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 那么 $F(x) + C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分, 即

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

因而不定积分 $\int f(x) dx$ 可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数.

例 4.1 求 $\int x dx$.

解 因为 $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$, 所以 $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$.

例 4.2 求 $\int \frac{1}{x} dx$.

解 当 $x > 0$ 时, 由于 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 所以

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

当 $x < 0$ 时, 由于 $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$, 所以

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$$

综上所述可得

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

例 4.3 求经过点 (1,3), 且其切线的斜率为 $3x^2$ 的曲线方程.

解 由 $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ 得曲线簇 $y = x^3 + C$.

将 $x=1, y=3$ 代入, 得 $C=2$. 所以

$$y = x^3 + 2$$

为所得曲线.

2. 不定积分的性质

性质 1 $(\int f(x) dx)' = f(x)$ 或 $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$,

$$\int f'(x) dx = f(x) + C \quad \text{或} \quad \int df(x) = f(x) + C$$

由此可见, 微分运算 (以记号 d 表示) 与求不定积分的运算 (简称积分运算, 以记号 $\int$ 表示) 是互逆的. 当记号 $\int$ 与 d 连在一起时, 或者抵消, 或者抵消后差一个常数.

性质 2 两个函数代数和的不定积分等于每个函数不定积分的代数和, 即

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

性质 3 被积函数中的非零常数因子可以提到积分号外面, 即

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad k \neq 0$$

3. 基本积分公式

因为微分运算与积分运算互为逆运算, 所以由基本导数公式或基本微分公式, 立即可得基本积分公式. 这些公式是计算不定积分的基础, 必须熟练掌握.

$$(1) \int k dx = kx + C \quad (k \text{ 为常数});$$

$$(2) \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C (\mu \neq -1);$$

$$(3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$(4) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C;$$

$$(5) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(7) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$(9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$(10) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$(11) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$

$$(12) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(13) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

这些基本积分公式的正确性可通过对等式右端的函数求导, 看它是否等于左端的被积函数来验证.

例 4.4 求 $\int (3x^2 - 2x + 1)dx$.

解

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 2x + 1)dx &= \int 3x^2 dx - \int 2x dx + \int dx \\ &= 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + \int dx = x^3 - x^2 + x + C. \end{aligned}$$

例 4.5 求 $\int \sqrt{x} \cdot (x^2 - 5)dx$.

解

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \cdot (x^2 - 5)dx &= \int \left(x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \int x^{\frac{5}{2}} dx - 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - 5 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{7} x^3 \cdot \sqrt{x} - \frac{10}{3} x \cdot \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

例 4.6 求 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx$.

解

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx &= \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2} dx \\ &= \int \left(x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \int x dx - 3 \int dx + 3 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 - 3x + 3 \ln |x| + \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

例 4.7 求 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

解 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C$

例 4.8 求 $\int 2^x \cdot e^x dx$.

解 $\int 2^x \cdot e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x \cdot e^x}{1 + \ln 2} + C$

例 4.9 求 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$.

解 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \ln|x| + \arctan x + C$

例 4.10 求 $\int \tan^2 x dx$.

解 $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$.

例 4.11 求 $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

解

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \frac{x}{2} dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x + C. \end{aligned}$$

例 4.12 求 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

解

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx = \tan x - \cot x + C \end{aligned}$$

习题 4.1

1. 一曲线通过点 $(e^2, 3)$, 且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

2. 设 $F(x)$ 是 $\frac{\sin x}{x}$ 的一个原函数, 求 $dF(\sqrt{x})$.

3. 计算下列不定积分:

(1) $\int (x^3 + 3x^2 + 1)dx$;

(3) $\int e^{x-3}dx$;

(5) $\int \sqrt[n]{x^n}dx$;

(7) $\int \frac{3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 5}{1+x^2}dx$;

(9) $\int \frac{e^x(x - e^{-x})}{x}dx$;

(11) $\int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x}dx$;

(2) $\int (10^x + \cot^2 x)dx$;

(4) $\int x^2 \sqrt{x}dx$;

(6) $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}dx$;

(8) $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$;

(10) $\int \sec x(\sec x - \tan x)dx$;

(12) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$.

4. 证明函数 $\arcsin(2x-1)$, $\arccos(1-2x)$ 和 $2\arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 都是 $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数.

4.2 换元积分法

利用基本积分表与积分的性质, 所能计算的不定积分是非常有限的. 因此, 有必要进一步来研究不定积分的求法. 本节把复合函数的微分法反过来用于求不定积分, 利用中间变量的代换, 得到复合函数的积分法, 称为换元积分法, 简称换元法. 换元法通常分成两类, 下面先讲第一类换元法.

1. 第一类换元积分法 (凑微分法)

定理 4.1 设函数 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$, 即 $\int f(u)du = F(u) + C$, 若 $u = \varphi(x)$ 为可导函数, 则有换元公式

$$\begin{aligned}\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx &= \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(u)du \\ &= F(u) + C = F[\varphi(x)] + C.\end{aligned}$$

称为第一类换元积分法.

证 由 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的原函数可知, $F'(u) = f(u)$. 于是由复合函数求导法则有

$$\{F[\varphi(x)]\}' = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

因此 $F[\varphi(x)]$ 是函数 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的原函数, 公式成立.

注 由 $\varphi'(x)dx$ 到微分 $d\varphi(x)$ 这一过程称为凑微分, 是解题的关键, 也是难点之所在, 因此第一类换元积分法有时也称为凑微分法.

例 4.13 求 $\int 3\sin 3xdx$.

解 令 $u = 3x$, 即 $dx = \frac{1}{3}du$

$$\int 3 \sin 3x dx = \int \sin u du = -\cos u + C = -\cos 3x + C.$$

例 4.14 求 $\int \frac{1}{3-2x} dx$.

解 令 $u = 3-2x$, 则 $dx = -\frac{1}{2}du$

$$\int \frac{1}{3-2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln|u| + C = -\frac{1}{2} \ln|3-2x| + C$$

在对变量代换比较熟练以后, 就不一定写出中间变量 u .

例 4.15 求 $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$.

解 $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} + C.$

例 4.16 求 $\int \tan x dx$.

解 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

同样

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

例 4.17 求 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{5x-2}} dx$.

解 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{5x-2}} dx = \frac{1}{5} \int (5x-2)^{-\frac{1}{3}} d(5x-2) = \frac{3}{10} (5x-2)^{\frac{2}{3}} + C.$

例 4.18 求 $\int x\sqrt{1-x^2} dx$.

解 $\int x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$

例 4.19 求 $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$ ($a \neq 0$).

解 $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} d\left(\frac{x}{a}\right)$

$$= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

例 4.20 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ($a > 0$).

解
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$= \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

例 4.21 求 $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$ ($a \neq 0$).

解 由于

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right),$$

所以

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right) dx \\ &= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{1}{x - a} dx - \int \frac{1}{x + a} dx \right) \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int \frac{1}{x - a} d(x - a) - \int \frac{1}{x + a} d(x + a) \right] \\ &= \frac{1}{2a} (\ln|x - a| - \ln|x + a|) + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C. \end{aligned}$$

例 4.22 求 $\int \sin^2 x \cos x dx$.

解
$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

例 4.23 求 $\int \cos^2 x dx$.

解
$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 2x d2x \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

同理可得

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

一般地, 若被积函数为 $\sin^m x \cos^n x$ 型, 则当 m 或 n 中有一个为正奇数时, 拆开奇数项凑微分; 当 m 与 n 都是偶数时, 则常用半角公式通过降低幂次来计算.

例 4.24 求 $\int \csc x dx$

解

$$\begin{aligned}\int \csc x dx &= \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\&= \int \frac{d \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d \tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.\end{aligned}$$

因为

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x.$$

所以上述不定积分可以表示为

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

类似可求得

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

例 4.25 求 $\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

解
$$\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int 2^{\arcsin x} d \arcsin x = \frac{2^{\arcsin x}}{\ln 2} + C.$$

2. 第二类换元法 (变量代换法)

在第一类换元积分法中是通过代换 $u = \varphi(x)$, 将积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 化为积分 $\int f(u)du$. 而第二类换元法的思路是若积分 $\int f(x)dx$ 不易计算, 则可作适当的变量代换 $x = \varphi(t)$, 把原积分化为 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$, 从而简化积分计算.

定理 4.2 设 $x = \varphi(t)$ 是单调可导函数, 且有反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$ 与 $\varphi'(t) \neq 0$. 又设 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 具有原函数 $\Phi(t)$, 即 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C$, 则有换元公式

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C = \Phi[\varphi^{-1}(x)] + C.$$

称为第二类换元积分法.

证 令 $F(x) = \Phi[\varphi^{-1}(x)]$, 由复合函数与反函数求导法则有

$$F'(x) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x),$$

即 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的原函数, 所以等式成立.

例 4.26 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$.

解 令 $t = \sqrt{x}$, 于是 $x = t^2$, $dx = 2t dt$.

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{2t}{1+t} dt = \int \frac{2(t+1)-2}{1+t} dt \\ &= \int \left(2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = 2t - 2 \ln|1+t| + C \\ &= 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C.\end{aligned}$$

例 4.27 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}$.

解 令 $t = \sqrt[6]{x}$, 则 $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^4} = 6 \int \frac{t^2}{1+t} dt = 6 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{1+t} dt \\ &= 6 \int (t-1) dt + 6 \int \frac{dt}{1+t} \\ &= 3t^2 - 6t + 6 \ln|t+1| + C \\ &= 3x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \ln \left| x^{\frac{1}{6}} + 1 \right| + C\end{aligned}$$

例 4.28 求 $\int \sqrt{e^x - 1} dx$.

解 令 $\sqrt{e^x - 1} = t$, 则 $x = \ln(t^2 + 1)$, $dx = \frac{2t dt}{t^2 + 1}$

所以

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x - 1} dx &= \int t \cdot \frac{2t dt}{t^2 + 1} = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = 2(t - \arctan t) + C \\ &= 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C\end{aligned}$$

在积分表达式中含有如下形式 $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ 时, 常通过适当的代换去掉根号, 一般方法如下:

若被积函数中含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 则设 $x = a \sin t$;

若被积函数中含有 $\sqrt{a^2 + x^2}$, 则设 $x = a \tan t$;

若被积函数中含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$, 则设 $x = a \sec t$.

例 4.29 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$).

解 设 $x = a \sin t$ ($t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), 则 $dx = a \cos t dt$

有

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t$$

于是

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt \\ &= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] + C \\ &= \frac{a^2}{2} [t + \sin t \cdot \cos t] + C \\ &= \frac{a^2}{2} \left[t + \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \right] + C \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \arcsin \frac{x}{a} \right] + C \\ &= \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

例 4.30 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ ($a > 0$).

解 设 $x = a \tan t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则 $dx = a \sec^2 t dt$

有

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 t + a^2} = a \sec t$$

于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{a \sec^2 t}{a \sec t} dt = \int \sec t dt \\ &= \ln |\sec t + \tan t| + C_1 \end{aligned}$$

为了要把 $\sec t$ 及 $\tan t$ 换成 x 的函数, 可以根据 $\tan t = \frac{x}{a}$ 作辅助三角形 (见图

4-1) 便有

$$\sec t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}$$

因此

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} \right| + C_1 = \ln |x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$$

其中 $C = C_1 - \ln a$.

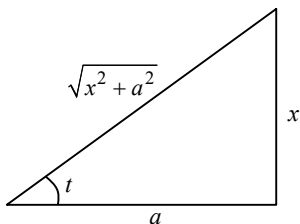


图 4-1

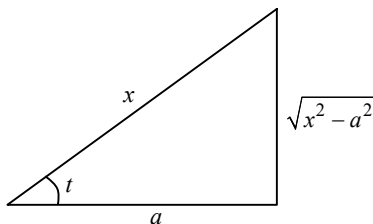


图 4-2

例 4.31 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} (a > 0)$.

解 令 $x = a \sec t$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $dx = a \sec t \cdot \tan t dt$

有

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} = a \tan t$$

于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \int \frac{a \sec t \tan t}{a \tan t} dt = \int \sec t dt \\ &= \ln |\sec t + \tan t| + C_1 \end{aligned}$$

为了要把 $\sec t$ 及 $\tan t$ 换成 x 的函数, 可以根据 $\sec t = \frac{x}{a}$ 作辅助三角形 (见图

4-2) 便有

$$\tan t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

因此

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} \right| + C_1 \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C \end{aligned}$$

其中 $C = C_1 - \ln a$.

在本节的例题中, 有几个积分是以后经常会遇到的, 所以它们通常也被当作公式使用. 这样常用的积分公式, 除了基本积分表中的几个外, 再添加下面几个 (其中常数 $a > 0$):

$$(13) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C;$$

- (14) $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$;
 (15) $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$;
 (16) $\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$;
 (17) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$;
 (18) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$;
 (19) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$;
 (20) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$.

习题 4.2

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数, 使等式成立.

- (1) $x dx = \underline{\hspace{1cm}} d(x^2)$; (2) $dx = \underline{\hspace{1cm}} d(7x-3)$;
 (3) $x dx = \underline{\hspace{1cm}} d(1-x^2)$; (4) $e^{-2x} dx = \underline{\hspace{1cm}} d(e^{-2x} + 1)$;
 (5) $\sin 3x dx = \underline{\hspace{1cm}} d(\cos 3x)$; (6) $\frac{1}{x} dx = \underline{\hspace{1cm}} d(3-5 \ln |x|)$;
 (7) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{1cm}} d(1 - \arcsin x)$; (8) $\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{1cm}} d(\sqrt{1-x^2})$.

2. 计算下列不定积分.

- (1) $\int \frac{1}{(2x+3)^9} dx$; (2) $\int \sqrt{1-3x} dx$;
 (3) $\int \sin(\omega t + \varphi) dt$; (4) $\int e^{-\frac{x}{2}} dx$;
 (5) $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x}} dx$; (6) $\int \frac{x}{3-2x^2} dx$;
 (7) $\int \frac{1}{1-4x^2} dx$; (8) $\int \frac{x}{(1+3x^2)^2} dx$;
 (9) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8} dx$; (10) $\int x^2 e^{-x^3} dx$;
 (11) $\int \frac{dt}{t \ln t}$; (12) $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$;

$$(13) \int \frac{1}{x^2 - x - 2} dx;$$

$$(14) \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5};$$

$$(15) \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x - x^2}};$$

$$(16) \int \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} dx;$$

$$(17) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$$

$$(18) \int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x+3}};$$

$$(19) \int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}} dx;$$

$$(20) \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx;$$

$$(21) \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx;$$

$$(22) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}};$$

$$(23) \int \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}};$$

$$(24) \int \frac{x^3 + 1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

4.3 分部积分法

设函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 具有连续导数, 由乘积微分法则有

$$d(uv) = u dv + v du,$$

两边同时取不定积分有

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du,$$

即

$$uv = \int u dv + \int v du,$$

移项, 有

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

这个公式叫做分部积分公式, 当积分 $\int u dv$ 不易计算, 而积分 $\int v du$ 比较容易计算时, 就可以使用这个公式.

运用分部积分公式时, 恰当选取 u 和 v' 是关键, 一般情况下, u 和 v' 可以按“反、对、幂、指、三”的顺序来确定. 具体地说, 如果被积函数是两类基本初等函数的乘积, 则依反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数的顺序, 将排在前面的选作 u , 排在后面的选作 v' .

例 4.32 求 $\int x \sin x dx$.

解 设 $u = x$, $dv = \sin x dx = d(-\cos x)$

则

$$du = dx, \quad v = -\cos x$$

于是应用分部积分公式, 得

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= -x \cos x - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

例 4.33 求 $\int x e^x dx$

解 设 $u = x$, $dv = e^x dx = de^x$

则

$$du = dx, \quad v = e^x$$

应用分部积分公式, 得

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

当分部积分公式用熟后, 函数 u 和 v' 选取的过程可以不必写出来.

例 4.34 求 $\int \arcsin x dx$

解

$$\begin{aligned}\int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int x d \arcsin x \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

例 4.35 求 $\int e^x \sin x dx$

解

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - \int \cos x de^x \\ &= e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx\end{aligned}$$

移项, 得

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) + 2C$$

所以

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

例 4.36 求 $\int x^2 \ln x dx$

解

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= \frac{1}{3} \int \ln x dx^3 = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 d \ln x \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C.\end{aligned}$$

例 4.37 求 $\int e^{\sqrt{x}} dx$

解 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$,

于是

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int t e^t dt = 2 \int t d e^t = 2(t e^t - \int e^t dt) \\ &= 2(t e^t - e^t) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C.\end{aligned}$$

例 4.38 求 $\int \sec^3 x dx$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \sec^3 x dx &= \int \sec x \cdot \sec^2 x dx = \int \sec x d \tan x \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\ &= \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x dx\end{aligned}$$

移项同时并除以 2 得

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} [\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|] + C.$$

例 4.39 求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx &= - \int \arctan e^x d e^{-x} \\ &= -e^{-x} \arctan e^x + \int e^{-x} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx \\ &= -e^{-x} \arctan e^x + \int \frac{1 + e^{2x} - e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx \\ &= -e^{-x} \arctan e^x + x - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + C.\end{aligned}$$

习题 4.3

求下列不定积分:

1. $\int x \sin 2x dx$;

2. $\int x \ln(x-1) dx$;

3. $\int x \cos^2 x dx$;

4. $\int x \sec^2 x dx$;

5. $\int (\arcsin x)^2 dx$;

6. $\int x \sin x \cos x dx$;

7. $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$;

8. $\int (x^2+2) \cos x dx$;

9. $\int e^x \sin^2 x dx$;

10. $\int x \tan^2 x dx$.

4.4 有理函数的积分

有理函数是指由两个多项式的商所表示的函数,即具有如下形式的函数

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}, \quad (4.1)$$

其中 m 和 n 都是正整数或零; $a_0, a_1, \dots, a_n$ 及 $b_0, b_1, \dots, b_m$ 都是实数, 且 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

在式 (4.1) 中, 当 $n \geq m$ 时, 称这个有理函数是假分式, 而当 $n < m$ 时, 则称之为真分式, 总可以将一个假分式化成一个多项式和一个真分式之和的形式.

多项式的积分很容易, 下面要解决有理真分式的不定积分问题.

根据代数学的有关理论可知, 任何有理真分式都可以分解为下列四类最简分式之和.

(1) $\frac{A}{x-a}$;

(2) $\frac{A}{(x-a)^n}$ (n 是正整数, $n \geq 2$);

(3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ ($p^2-4q < 0$);

(4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ (n 是正整数, $n \geq 2, p^2-4q < 0$);

若有理真分式分母中含有因式 $(x-a)^n$ ($n \geq 2$), 那么分式中含有

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n};$$

若有理真分式分母中含有因式 $(x^2+px+q)^n$ ($n \geq 2, p^2-4q < 0$), 那么分式

中含有 $\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n}$.

例 4.40 真分式 $\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-2)(x-3)}$ 可分解为

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

其中 A, B 为待定系数, 通过待定系数方法可求得.

上式两端去分母后, 得

$$x+3 = A(x-3) + B(x-2),$$

$$x+3 = (A+B)x - (3A+2B).$$

因为这是恒等式, 等式两端 x 的系数和常数项必须分别相等, 于是有

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -(3A+2B)=3 \end{cases}$$

从而解得 $A=-5, B=6$.

于是

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3}.$$

例 4.41 真分式 $\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$ 可分解为

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2},$$

其中 A, B, C 可用待定系数法求得, 两端去分母后, 得

$$1 = (A+2B)x^2 + (B+2C)x + C + A.$$

比较上式两端 x 的各同次幂的系数及常数项, 则有

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ B+2C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$

解得

$$A = \frac{4}{5}, \quad B = -\frac{2}{5}, \quad C = \frac{1}{5}.$$

于是

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

例 4.42 真分式 $\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}$ 可分解为

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}$$

其中 A, B_1, B_2, C_1, C_2 可用待定系数法求得, 两端去分母后, 再比较两端分子中 x 的不同次幂的系数, 得方程组

$$\begin{cases} A+B_1=0 \\ C_1-B_1=0 \\ 2A+B_2+B_1-C_1=0 \\ C_2+C_1-B_2-B_1=2 \\ A-C_2-C_1=2 \end{cases}$$

解得 $A=1, B_1=-1, C_1=-1, B_2=-2, C_2=0$.

例 4.43 求 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6} dx$.

$$\text{解} \quad \int \frac{x+3}{x^2-5x+6} dx = \int \left(\frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3} \right) dx = \ln \left| \frac{(x-3)^6}{(x-2)^5} \right| + C.$$

例 4.44 求 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} dx$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} dx &= \frac{4}{5} \int \frac{1}{1+2x} dx - \frac{1}{5} \int \frac{2x-1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{4}{5} \int \frac{1}{1+2x} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) + \frac{1}{5} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{4}{5} \ln|1+2x| - \frac{1}{5} \ln(1+x^2) + \frac{1}{5} \arctan x + C. \end{aligned}$$

例 4.45 求 $\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{x+1}{x^2+1} dx - \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \ln|x-1| - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} d(x^2+1) - \arctan x + \frac{1}{x^2+1} \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctan x + \frac{1}{x^2+1} + C. \end{aligned}$$

习题 4.4

求下列不定积分:

$$1. \int \frac{1}{x^2(1+2x)} dx;$$

$$2. \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx;$$

$$3. \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx;$$

$$4. \int \frac{x(2-x^2)}{1-x^4} dx;$$

$$5. \int \frac{x}{x^3-x^2+x-1} dx;$$

$$6. \int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} dx.$$

总习题四

1. 填空题

(1) 已知曲线上任一点切线的斜率为 $2x$ ，并且曲线经过点 $(1, -2)$ ，则该曲线的方程是_____;

(2) 设 $\int f(x)dx = 2e^{-x^2} + C$ ，则 $f(x) =$ _____;

(3) $\int e^{f(x)} f'(x) dx =$ _____;

(4) $\int x^3 e^{x^2} dx =$ _____.

2. 选择题

(1) 若 $\frac{2}{3} \ln \cos 2x$ 是 $f(x) = k \tan 2x$ 的一个原函数，则 $k =$ ().

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $-\frac{4}{3}$

(2) 若 $\int f(x)dx = x^2 + C$ ，则 $\int xf(1-x^2)dx =$ ().

A. $2(1-x^2)^2 + C$

B. $-2(1-x^2)^2 + C$

C. $\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$

D. $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$

(3) 若 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int f(x)dx = F(x) + C$ ， C 为任意常数，则下列各式中正确的是 ().

A. $\int f(ax+b)dx = F(ax+b) + C$

B. $\int f(x^n)x^{n-1}dx = F(x^n) + C$

$$\text{C. } \int f(\ln ax) \frac{1}{x} dx = F(\ln ax) + C \quad \text{D. } \int f(e^{-x}) e^{-x} dx = F(e^{-x}) + C$$

(4) 若 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int x f'(x) dx = (\quad)$.

$$\text{A. } x \cos x - \sin x + C$$

$$\text{B. } x \sin x + \cos x + C$$

$$\text{C. } x \cos x + \sin x + C$$

$$\text{D. } x \sin x - \cos x + C$$

(5) 设 $f'(e^x) = 1 + x$, 则 $f(x) = (\quad)$.

$$\text{A. } 1 + \ln x + C$$

$$\text{B. } x \ln x + C$$

$$\text{C. } x + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{D. } x \ln x - x + C$$

3. 已知某产品产量的变化率是时间 t 的函数 $f(t) = at + b$ (a, b 是常数), 这次产品 t 时刻的产量函数为 $P(t)$, 已知 $P(0) = 0$, 求 $P(t)$.

4. 求下列不定积分

$$(1) \int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx;$$

$$(2) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx;$$

$$(3) \int x^3 \sqrt{x} dx;$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(5) \int \left(2e^x + \frac{3}{x} \right) dx;$$

$$(6) \int (x^2 - 3x + 2) dx;$$

$$(7) \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)};$$

$$(8) \int \frac{e^{2t} - 1}{e^t - 1} dt;$$

$$(9) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$$

$$(10) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$$

$$(11) \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(12) \int \frac{1}{1 - \cos 2x} dx.$$

5. 设 $x \ln x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int f'(x) dx$.

6. 求下列不定积分

$$(1) \int e^{-5x} dx;$$

$$(2) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(3) \int \frac{1}{1-2x} dx;$$

$$(4) \int u \sqrt{u^2 - 5} du;$$

$$(5) \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx;$$

$$(6) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(7) \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx;$$

$$(8) \int \frac{dx}{x \ln x};$$

$$(9) \int x e^{x^2} dx;$$

$$(10) \int x \cos x^2 dx;$$

$$(11) \int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}} dx;$$

$$(13) \int \frac{1}{4+9x^2} dx;$$

$$(15) \int e^{\sin x} \cos x dx;$$

$$(17) \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx;$$

$$(19) \int \tan^4 x dx;$$

$$(12) \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx;$$

$$(14) \int \frac{10^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(16) \int \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt;$$

$$(18) \int \frac{e^x}{\arcsin e^x \cdot \sqrt{1-e^{2x}}} dx;$$

$$(20) \int \cos^3 x dx.$$

7. 求下列不定积分

$$(1) \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}};$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$(5) \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx;$$

$$(7) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(9) \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx;$$

$$(11) \int \frac{1}{e^x-1} dx;$$

$$(13) \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}};$$

$$(15) \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}.$$

$$(2) \int x\sqrt{x+1} dx;$$

$$(4) \int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx;$$

$$(6) \int \frac{1+\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1+x}} dx;$$

$$(8) \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx;$$

$$(10) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx;$$

$$(12) \int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} dx;$$

$$(14) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx;$$

8. 求下列不定积分

$$(1) \int x^2 e^{-x} dx;$$

$$(3) \int e^x \cos x dx;$$

$$(5) \int \arccos x dx;$$

$$(7) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx;$$

$$(9) \int \cos \sqrt{x} dx;$$

$$(2) \int x \sin 2x dx;$$

$$(4) \int \ln(1+x^2) dx$$

$$(6) \int x^2 \cos x dx;$$

$$(8) \int \frac{\ln \ln x}{x} dx;$$

$$(10) \int \sec^3 x dx;$$

$$(11) \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx;$$

$$(12) \int \sin(\ln x) dx;$$

9. 求下列不定积分

$$(1) \int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx;$$

$$(2) \int \frac{x^3}{3+x} dx;$$

$$(3) \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx;$$

$$(4) \int \frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx;$$

$$(5) \int \frac{1}{x^4-1} dx;$$

$$(6) \int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx.$$

10. 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ x \ln x, & 1 < x < +\infty \end{cases}$ 且 $f(0) = 0$, 试求 $f(x)$.

11. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1, \\ x^2, & x < 1, \end{cases}$ 求 $\int f(x) dx$.

12. 设 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x f'(x) dx$.

13. 设 $\int x f(x) dx = \arcsin x + C$, 求 $\int \frac{dx}{f(x)}$.