第 2 章　连续信号与系统的时域分析

本章学习目标

本章详细介绍连续信号时域基本特性，特别是单位冲激信号的特性；详细介绍连续系统的基本特性、时域经典法求解 LTI 连续系统的零输入响应和冲激响应，时域卷积解法求解 LTI 连续系统的零状态响应；给出信号的基本运算及系统的响应仿真分析方法和结果。通过本章的学习，读者应该达到以下要求：

- 掌握典型信号的特性，熟悉信号的基本运算与变换。
- 掌握 LTI 连续系统的基本特性，了解 LTI 连续系统数学模型的建立及系统的初始条件。
- 熟悉 LTI 连续系统零输入响应的经典解法和零状态响应的卷积解法。
- 掌握冲激信号的性质及 LTI 连续系统的冲激响应、阶跃响应。
- 熟悉卷积积分及其主要性质，了解卷积积分的图解。
- 初步熟悉对信号的基本运算及系统阶跃响应特性的仿真分析。

在第 1 章中着重介绍了信号与系统的基本概念。从本章开始分别从时域到变换域的角度，对信号的基本特性和系统的基本特性进行分析，并利用 Multisim 对基本信号和基本电路系统进行仿真分析。

本章将讨论连续信号的基本特性，特别是引入了单位冲激函数 $\delta(t)$ 和单位阶跃函数 $u(t)$ 为基本信号，从而使对于一般信号的描述、运算与变换等变得更加清晰、简单和方便。对于连续系统，通过给定系统的数学模型为求解其响应，建立了连续系统的时域分析方法。特别是利用输入信号与系统单位冲激响应的卷积求系统的零状态响应，不仅简化了响应求解的问题，而且进一步奠定了系统分析的理论基础。随着计算机技术的发展，利用时域卷积分析系统得到了更广泛的应用。

2.1　基本连续时间信号

本节所介绍的信号都是理想的典型信号，与实际信号有一定的差距，但对理论分析却是重要的和有意义的，对工程实际不乏指导意义。

2.1.1　正弦信号

正弦信号和余弦信号仅在相位上相差 $\pi/2$，统称为正弦信号，在这里可以是正弦电压信号，也可以是正弦电流信号。一般表示为

$$f(t) = K\sin(\omega t + \theta) \qquad (2.1\text{-}1)$$

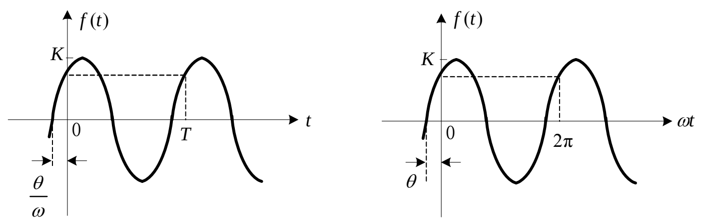
其中 K 为振幅，ω 为角频率，θ 为初相位（初相角）。这三个参量称为正弦信号的三要素。

除了这三要素，正弦信号还有周期 T 和频率 f 两个参数，它们之间的关系为

$$T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{或} \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

其中 ω 的单位为弧度/秒（rad/s），f 的单位为赫兹（Hz），T 的单位为秒（s）。

正弦信号的波形如图 2.1-1 所示。图 2.1-1（a）的横坐标是时间 t，在实际的测量中，通过示波器能够观测到。而图 2.1-1（b）的横坐标是 ωt，在描述和表示上比较方便，易于理解。



（a）横坐标是时间　　　　（b）横坐标是相位

图 2.1-1　正弦信号

2.1.2　指数信号

1．指数信号

通常，描述某事物呈现一种快速单边衰减或增长都会采用指数信号。一般指数信号可以表示为

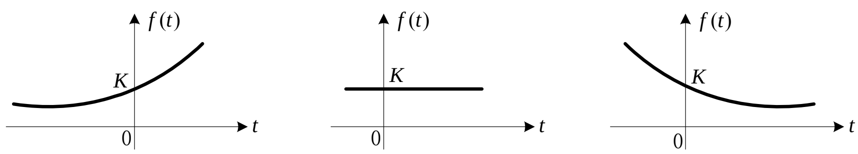
$$f(t)=K\mathrm{e}^{\sigma t} \tag{2.1-2}$$

其中 K 和 σ（指数因子）为实常数，所以式（2.1-2）表示的信号称为实指数信号，简称指数信号。$|\sigma|$ 的大小决定了指数信号变化的快慢，即变化速率，$|\sigma|$ 值越大，信号变化速率越快，反之，越慢。指数信号在信号与系统分析理论中是一个非常重要的信号，原因是指数信号对时间的微分或积分仍会得到原信号形式，容易进行数学分析。当 σ 取不同数值时，其含义为：

（1）当 $\sigma>0$ 时，指数信号称为增长指数信号，波形如图 2.1-2（a）所示。

（2）当 $\sigma=0$ 时，指数信号称为直流信号，波形如图 2.1-2（b）所示。

（3）当 $\sigma<0$ 时，指数信号称为衰减指数信号，波形如图 2.1-2（c）所示。



（a）增长指数信号　　（b）直流信号　　（c）衰减指数信号

图 2.1-2　指数信号

仅存在于 $t\geqslant0$ 或 $t\leqslant0$ 时间范围内的指数信号称为单边指数信号。常见的是 $t\geqslant0$ 的单边衰减指数信号，其表达式为

$$f(t)=K\mathrm{e}^{\sigma t} \qquad \sigma<0，\ t\geqslant0 \tag{2.1-3}$$

波形如图 2.1-3 所示。注意，信号在 t=0 时发生跳变，跳变值为 $\Delta f(0)=f(0^+)-f(0^-)=K-0=K$。

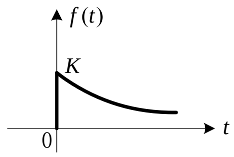


图 2.1-3 单边衰减指数信号

2. 复指数信号

复指数信号与指数信号相似，其表达式为

$$f(t)=K\mathrm{e}^{st} \tag{2.1-4}$$

其中 K 为常数，可以是实数，也可以是复数；指数因子 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ 是一复数。复指数信号还可以写成三角形式

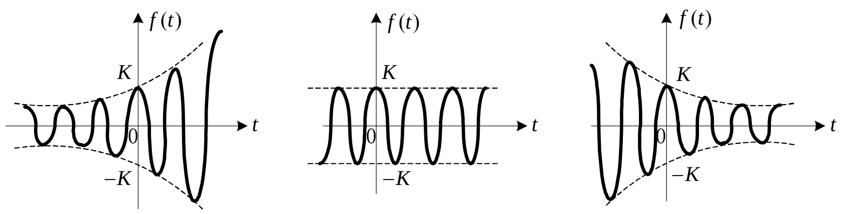
$$f(t)=K\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}=K\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t+\mathrm{j}K\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t \tag{2.1-5}$$

当 K 为实数时，$f(t)$ 的实部和虚部分别表现为变幅正弦振荡信号：

（1）当 $\sigma>0$，$\omega\neq0$ 时，复指数信号 $f(t)$ 的实部、虚部表现为增幅正弦振荡信号，实部波形如图 2.1-4（a）所示，正弦信号的振幅按增长指数规律变化，其包络为增长指数信号。

（2）当 $\sigma=0$，$\omega\neq0$ 时，复指数信号 $f(t)$ 的实部、虚部表现为等幅正弦振荡信号，实部波形如图 2.1-4（b）所示，正弦信号的振幅不变化。

（3）当 $\sigma<0$，$\omega\neq0$ 时，复指数信号 $f(t)$ 的实部、虚部表现为衰减正弦振荡信号，实部波形如图 2.1-4（c）所示，正弦信号的振幅按衰减指数规律变化，其包络为衰减指数信号。



（a）增幅正弦振荡信号　（b）等幅正弦振荡信号　（c）衰减正弦振荡信号

图 2.1-4 复指数信号

（4）当 $\sigma=0$，$\omega=0$ 时，复指数信号 $f(t)$ 成为一直流信号。

不难看出，复指数信号在信号与系统分析理论中是一个非常重要的信号。它不仅能够描述各种基本信号，还同实指数信号一样，对时间的微分或积分仍会得到原信号形式，容易进行数学分析。但是，在实际上并不存在复指数信号。

2.1.3 抽样信号

抽样信号以符号 $Sa(t)$ 来表示，其表达式为

$$Sa(t)=\frac{\sin t}{t} \tag{2.1-6}$$

波形如图 2.1-5 所示。

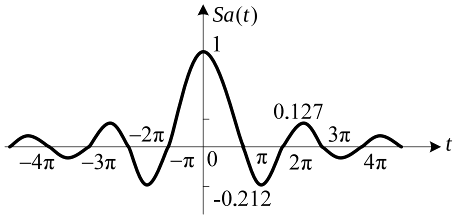


图 2.1-5　抽样信号

抽样信号的特性如下：

（1）抽样信号是偶函数，即满足 $Sa(t)=Sa(-t)$ 。

（2）抽样信号在 $t=k\pi$ （k 为非零整数）时刻取值为 0。

（3）在 $t=0$ 时刻存在一个重要的极限 $\lim\limits_{t\to 0}Sa(t)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ 。

（4） $Sa(t)$ 曲线下的面积等于 π ，即 $\int_{-\infty}^{\infty}Sa(t)\mathrm{d}t=\pi$ 。

2.1.4　奇异信号

函数本身存在不连续点（有跳变）或其导数、积分含有不连续点，此类信号统称为奇异信号，亦称奇异函数。

典型的奇异信号有如下几种，其中单位阶跃信号和单位冲激信号尤为重要。

1. 单位斜变信号

斜变信号又称斜坡信号，是指信号在某时刻以后随时间呈现正比例增长。当斜变信号随时间增长的速率为 1 时，称为单位斜变信号或单位斜坡信号，用符号 $R(t)$ 表示，定义为

$$R(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\geqslant 0\end{cases}\tag{2.1-7}$$

其波形如图 2.1-6（a）所示。

图 2.1-6（b）所示为延迟的单位斜变信号，时间起始点为 t_0 （ $t_0>0$ ），其定义为

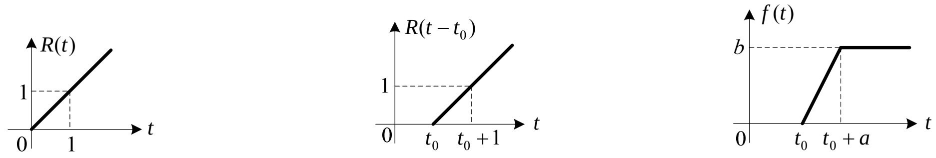
$$R(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ t-t_0 & t\geqslant t_0\end{cases}\tag{2.1-8}$$

随时间增长的速率不为 1 的斜变信号称为一般的斜变信号，也可以表示成单位斜变信号的形式，如信号 $f(t)=2t$ （t≥0），可以写成 $f(t)=2R(t)$ 。在实际应用中，斜变信号一般有时间延迟，且当信号增长到一定数值时不再发生变化，如图 2.1-6（c）所示，可表示为

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{b}{a}(t-t_0) & t_0\leqslant t<t_0+a\\ b & t\geqslant t_0+a\end{cases}\tag{2.1-9}$$

若用斜变信号表示，则

$$f(t)=\frac{b}{a}[R(t-t_0)-R(t-t_0-a)]\tag{2.1-10}$$



（a）无延迟单位斜变信号　（b）有延迟单位斜变信号　（c）有延迟有折转截平斜变信号

图 2.1-6　斜变信号

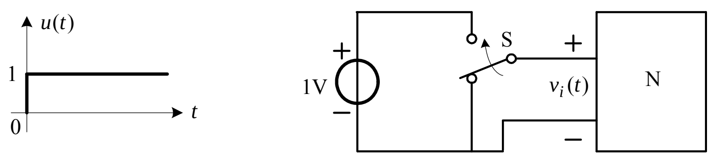
2. 单位阶跃信号

（1）单位阶跃信号又称开关信号，如图 2.1-7（a）所示，用符号 $u(t)$ 来表示，其定义为

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases} \tag{2.1-11}$$

式（2.1-11）表明，在 $t=0$ 时刻，其值发生了跳变，即 $u(0^-)=0$，$u(0^+)=1$。通常，可以不考虑信号 $u(t)$ 在 $t=0$ 时刻的定义值。

在理想情况下，单位直流电压源或电流源在 $t=0$ 时刻接入电路并且无限持续下去，此种电源激励信号可以近似表示为单位阶跃信号。图 2.1-7（b）所示为一理想直流电压源在 $t=0$ 时刻接入电网络 N，则网络 N 的输入电压 $v_i(t)=u(t)$。



（a）　（b）

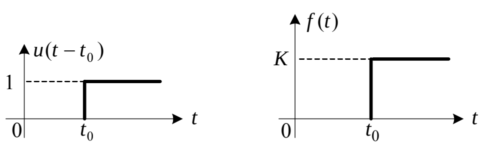
图 2.1-7　单位阶跃信号

（2）如果单位直流电源的接入时间为 $t=t_0$，且 $t_0>0$，可以用延迟的单位阶跃信号来表示，如图 2.1-8（a）所示，表示为

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases} \tag{2.1-12}$$

（3）理想直流电源接入电路时，可能存在时间延迟，而且电源的电压值或电流值不为 1，如图 2.1-8（b）所示，表示为

$$f(t)=Ku(t-t_0) \tag{2.1-13}$$



（a）有延迟　（b）有延迟幅值不为 1

图 2.1-8　阶跃信号

单位阶跃信号 $u(t)$ 和延迟的单位阶跃信号 $u(t-t_0)$ 均可以理解为开关信号，可以借助二者确定任意信号的起始时刻。如单位斜变信号表示为 $R(t)=tu(t)$，延迟的单位斜变信号表示为

$R(t-t_0)=(t-t_0)u(t-t_0)$，单边指数信号表示为 $f(t)=K\mathrm{e}^{\sigma t}u(t)$，图 2.1-6（c）所示的信号可表示为

$$f(t)=\frac{b}{a}[(t-t_0)u(t-t_0)-(t-t_0-a)u(t-t_0-a)] \qquad (2.1\text{-}14)$$

3. 单位冲激信号

冲激信号的概念来源于某些物理现象，如自然界中的雷电、电力系统中开关启闭产生的瞬间电火花、通信系统中的抽样脉冲等。

图 2.1-9 所示为一无初始储能的充电电路，直流电压源的电压为 E，当电容容量 C 不变，电阻 R 减少时，充电速率提高，当 $R\to 0$ 时，开关闭合后，电容两端电压由原来的 0 值突变到电源电压值 E，此时电流值为无限大，如何来表示这一无限大的电流呢？

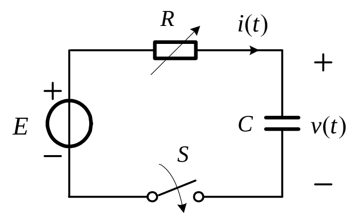


图 2.1-9　无初始储能的充电电路

在图 2.1-9 所示的电路中，当 $R=0$，$C=1\text{F}$，$E=1\text{V}$ 时，开关闭合后的一瞬间电流幅度达到无穷大，引用冲激信号来表示，其强度即电容电压 1V。当信号的幅度无限大，强度为单位数值 1 时，称此信号为单位冲激信号，用符号 $\delta(t)$ 来表示。单位冲激信号 $\delta(t)$ 的定义方式有多种，这里采用矩形脉冲的极限来定义。

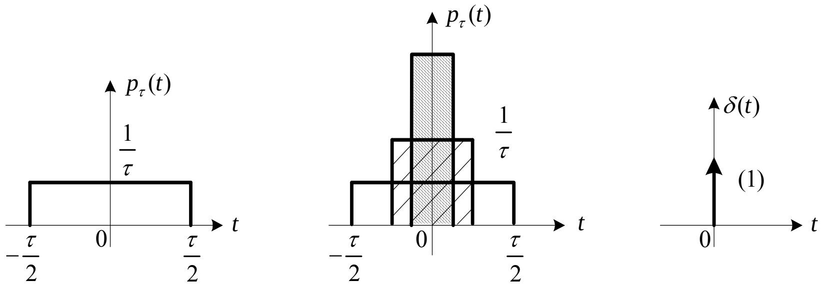
如图 2.1-10（a）所示的矩形脉冲信号 $p_\tau(t)$，其脉冲宽度为 τ，脉冲幅度为 $1/\tau$，则矩形脉冲的面积为 1。若保持面积不变，当 τ 减少时，脉冲幅度必然增加，如图 2.1-10（b）所示；当 $\tau\to 0$ 时，$1/\tau\to\infty$，矩形脉冲信号演变为单位冲激信号 $\delta(t)=\lim\limits_{\tau\to 0}p_\tau(t)$，其定义为

$$\begin{cases}\delta(t)=0 & t\neq 0\\ \delta(t)=\infty & t=0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1\end{cases} \qquad (2.1\text{-}15)$$

单位冲激信号 $\delta(t)$ 的波形如图 2.1-10（c）所示，其幅度为 ∞，强度为 1。$\delta(t)$ 的定义是基于广义函数的概念，它不符合普通函数的定义，函数与自变量之间没有明确的关系。

当单位冲激信号出现在 $t=t_0$ 时，称其为延迟的单位冲激信号，表示为 $\delta(t-t_0)$，如图 2.1-11（a）所示，定义为

$$\begin{cases}\delta(t-t_0)=0 & t\neq t_0\\ \delta(t-t_0)=\infty & t=t_0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=1\end{cases} \qquad (2.1\text{-}16)$$



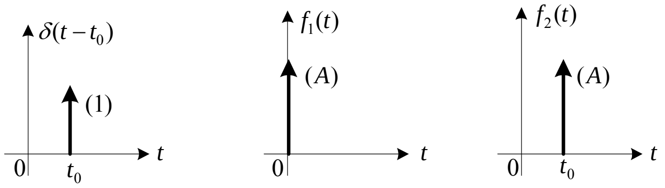
（a）矩形脉冲信号　（b）矩形脉冲信号时宽的演变　（c）单位冲激信号

图 2.1-10　单位冲激信号的定义过程

当冲激信号的幅度无限大，强度为 A 时，如图 2.1-11（b）所示，可以称其为一般冲激信号，即 $f_1(t) = A\delta(t)$，定义为

$$\begin{cases} f_1(t) = 0 & t \neq 0 \\ f_1(t) = \infty & t = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t = A \end{cases}$$

图 2.1-11（c）所示为延迟的冲激信号，$f_2(t) = A\delta(t - t_0)$。

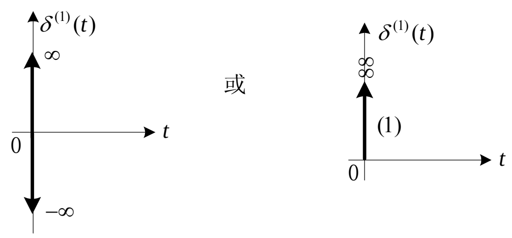


（a）有延迟的单位冲激信号　（b）一般冲激信号　（c）有延迟的冲激信号

图 2.1-11　冲激信号

4. 单位冲激偶信号

单位冲激信号的求导称为单位冲激偶信号，又称二次冲激信号，用符号 $\delta^{(1)}(t)$ 表示。冲激偶信号顾名思义是有两个上下对称的冲激信号，如图 2.1-12（a）所示，或简单表示为图 2.1-12（b）所示的形式。



（a）对称表示　（b）非对称表示

图 2.1-12　冲激偶信号

由上述分析可以看出，信号 $R(t)$、$u(t)$、$\delta(t)$ 和 $\delta^{(1)}(t)$ 之间具有如下关系：

（1）微分关系

$$
\begin{cases}
u(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[R(t)] \\
\delta(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u(t)] \\
\delta^{(1)}(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\delta(t)]
\end{cases}
\tag{2.1-17}
$$

（2）积分关系

$$
\begin{cases}
\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta^{(1)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
R(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau
\end{cases}
\tag{2.1-18}
$$

式（2.1-18）中的积分下限可以取 0^-。

如果信号 $R(t)$、$u(t)$、$\delta(t)$ 与 $\delta^{(1)}(t)$ 存在延迟，它们之间仍然存在上述关系。

5. 门函数

门函数是一矩形脉冲信号，又称矩形窗函数，用符号 $g_\tau(t)$ 来表示，如图 2.1-13 所示，其脉冲宽度为 τ，脉冲幅度为 1，定义为

$$
g_\tau(t)=\begin{cases}1 & |t|<\tau/2 \\ 0 & |t|>\tau/2\end{cases}
\tag{2.1-19}
$$

式（2.1-19）还可以表示为 $g_\tau(t)=u\left(t+\dfrac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)$。

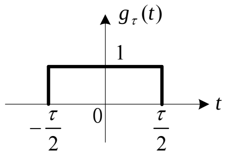


图 2.1-13　门函数

6. 符号函数

符号函数又称正负号函数，用符号 sgn t 来表示，如图 2.1-14 所示，定义为

$$
\operatorname{sgn} t=\begin{cases}-1 & t<0 \\ 1 & t>0\end{cases}
\tag{2.1-20}
$$

式（2.1-20）还可以表示为 $\operatorname{sgn} t=2u(t)-1$。

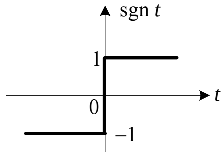


图 2.1-14　符号函数

2.2　信号的运算与变换

2.2.1　信号的代数运算

1．加减运算

已知信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，则两个信号加减运算后的 $f_3(t)$ 表示为

$$f_3(t)=f_1(t)\pm f_2(t) \tag{2.2-1}$$

信号进行加减运算时，注意要在对应区间的对应时刻上进行。同时，信号值域的非零值区间范围发生了变化，即 $f_3(t)$ 下限取信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 下限中的小值，上限取信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 上限中的大值。

例 2.2-1　分别求出门函数 $g_\tau(t)$ 与符号函数 $\operatorname{sgn} t$ 相加和相减后的信号，并写出表达式。

解　两信号的相加和相减运算如图 2.2-1 所示。其表达式为

$$g_\tau(t)+\operatorname{sgn}\ t=\begin{cases}-1 & t<-\tau/2\\ 0 & -\tau/2<t<0\\ 2 & 0<t<\tau/2\\ 1 & t>\tau/2\end{cases}$$

$$g_\tau(t)-\operatorname{sgn}\ t=\begin{cases}1 & t<-\tau/2\\ 2 & -\tau/2<t<0\\ 0 & 0<t<\tau/2\\ -1 & t>\tau/2\end{cases}$$

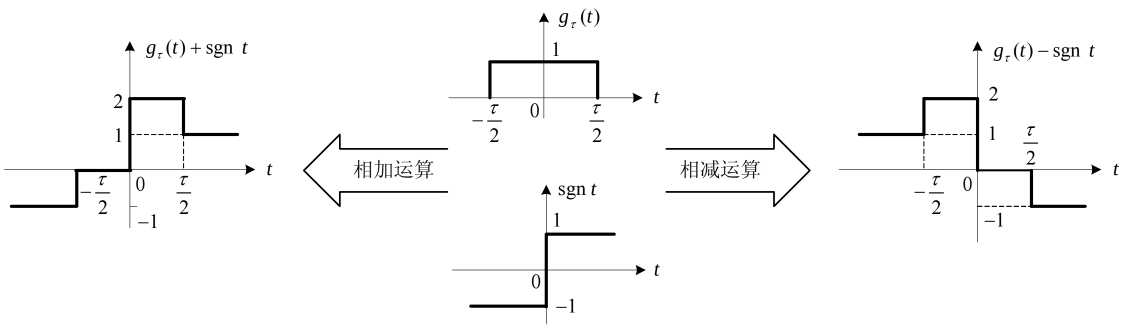


图 2.2-1　信号的加减运算

由图 2.2-1 可以看出，两信号的相加和相减运算得到的信号值域的非零值区间范围发生了变化。

2．相乘运算

已知信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，则两个信号相乘后的 $f_3(t)$ 表示为

$$f_3(t)=f_1(t)\cdot f_2(t) \tag{2.2-2}$$

信号进行相乘运算时，注意要在对应区间的对应时刻上进行。同时，信号值域的非零值区间范围发生了变化，即 $f_3(t)$ 下限取信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 下限中的大值，上限取信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$

上限中的小值。

例 2.2-2 求门函数 $g_\tau(t)$ 与符号函数 $\operatorname{sgn} t$ 相乘后所得信号，并写出表达式。

解 两信号的相乘运算如图 2.2-2 所示。其表达式为

$$g_\tau(t)\cdot \operatorname{sgn} t=\begin{cases}0 & |t|>\tau/2\\ -1 & -\tau/2<t<0\\ 1 & 0<t<\tau/2\end{cases}$$

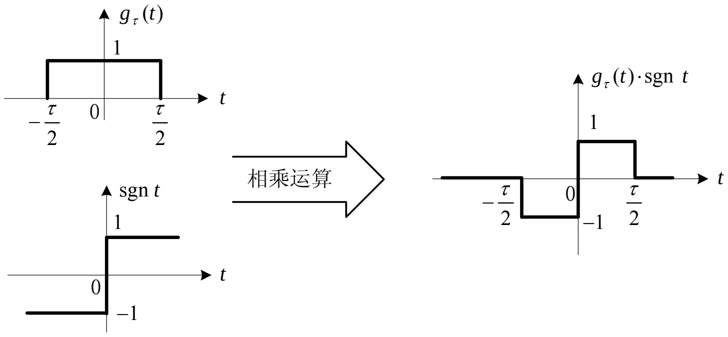


图 2.2-2 相乘运算

由图 2.2-2 可以看出，两信号的相乘运算得到的信号值域的非零值区间范围发生了变化。

2.2.2 信号的微分与积分

已知信号 $f(t)$，其微分运算后得到 $y_1(t)$，表示为

$$y_1(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.2-3}$$

$f(t)$ 经积分运算后得到 $y_2(t)$，表示为

$$y_2(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.2-4}$$

在进行微分与积分运算时，要特别注意两点：一是对于含间断点的信号，微分时得到冲激信号，冲激强度等于跳变值；二是分段积分时，前一段的积分值对以后积分的影响。

例 2.2-3 已知电压信号 $v(t)$，如图 2.2-3 所示。若 $v(t)$ 是电容两端的电压，求流过电容的电流 $i_C(t)$；若 $v(t)$ 是电感两端的电压，求流过电感的电流 $i_L(t)$。其中电容容量为 C，电感的电感量为 L。

解 由图 2.2-3 所示波形可以写出表达式 $v(t)=u(t)-u(t-2)$，根据电路理论，并应用信号之间的关系，得到流过电容和电感的电流分别为

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[u(t)-u(t-2)\right]=C\left[\delta(t)-\delta(t-2)\right]$$

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}\left[u(\tau)-u(\tau-2)\right]\mathrm{d}\tau=\frac{1}{L}\left[R(t)-R(t-2)\right]$$

对应的波形如图 2.2-4 所示。

图 2.2-4 中，表示冲激信号强度的负号只是表明冲激信号的方向。

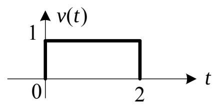


图 2.2-3　电压信号

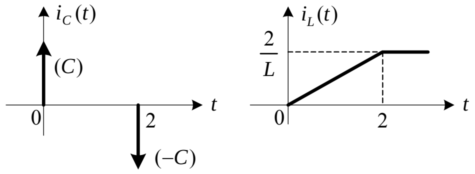


图 2.2-4　电流信号

2.2.3　信号的反褶

信号的反褶，又称折叠，就是把原信号沿纵轴翻转 180°。已知原信号 $f(t)$，其反褶运算后得到 $y(t)$，表示为

$$y(t) = f(-t) \tag{2.2-5}$$

式（2.2-5）表明，将 $f(t)$ 中的自变量 t 置换为$-t$ 就得到反褶信号 $f(-t)$。实际上，对录制好的音像信号进行倒放的过程就是对信号的反褶过程。

例 2.2-4　求图 2.2-5 所示信号的反褶信号 $f(-t)$。

解　由图 2.2-5 所示的信号可得其反褶信号的波形，如图 2.2-6 所示，表示为

$$f(-t) = (1-\frac{1}{2}t)u(t+2)+\frac{1}{2}tu(t)-u(t-1) \tag{2.2-6}$$

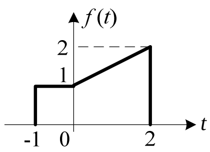


图 2.2-5　原信号

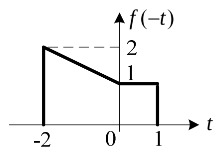


图 2.2-6　反褶信号

在例 2.2-4 中，也可以直接由变量替换求得

$$f(-t) = u(1-t)-\frac{1}{2}tu(-t)-(1-\frac{1}{2}t)u(-t-2) \tag{2.2-7}$$

式（2.2-7）和式（2.2-6）是相等的，只是形式不同而已。

2.2.4　信号的时移

信号的时移，又称为平移，是将原信号沿时间轴向左或向右移动。若信号为 $f(t)$，时移后得到 $y(t)$，表示为

$$y(t) = f(t+b) \tag{2.2-8}$$

其中，b 为实常数，信号 $f(t+b)$ 是将 $f(t)$ 平移 $|b|$ 个单位后的信号。当 $b<0$ 时，$f(t+b)$ 滞后于 $f(t)$，$f(t)$ 向右平移 $|b|$ 个单位得到 $f(t+b)$；当 $b>0$ 时，$f(t+b)$ 超前于 $f(t)$，将 $f(t)$ 向左平移 b 个单位得到 $f(t+b)$。用表达式表示时将信号 $f(t)$ 函数式中的 t 置换为 $t+b$。

超前可以简单地认为“时间起点（或终点）靠前”；滞后可以简单地认为“时间起点（或终点）靠后”，如图 2.2-7 所示。

在 $f(-t)$ 的基础上怎样得到 $f(-t+b)$ 呢？

$f(-t)$ 是原信号 $f(t)$ 的反褶信号，如 $f(-t+1)$ 可由 $f(-t)$ 右移一个单位获得，与由 $f(t)$ 得

到 $f(t+1)$ 的情况恰恰相反，如图 2.2-8 所示。

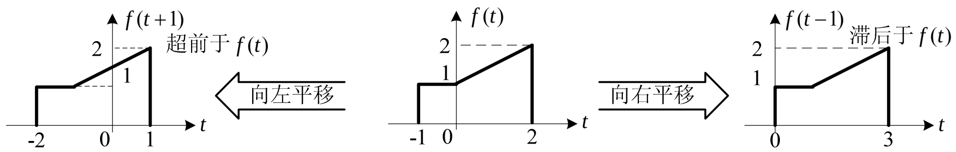


图 2.2-7　信号的时移（1）

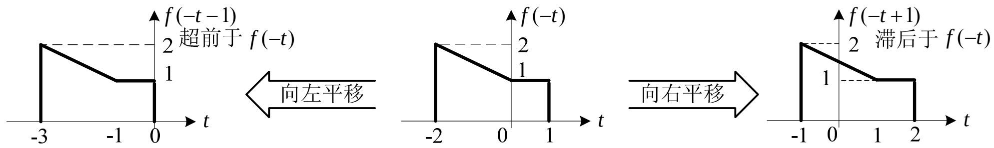


图 2.2-8　信号的时移（2）

由图 2.2-6 至图 2.2-8 可以看出，信号进行反褶和时移运算后，信号的波形没有发生本质上的变化，也就意味着运算后的信号没有丢失其所传递的信息。

2.2.5　信号的尺度变换

在实际信号传输过程中，为了提高传输效率，经常要对信号进行时间“压缩”，在接收端“扩展”被压缩的信号得到原信号，这就要用到信号的尺度变换知识，信号经时域压缩后可以提高传输速率，但必须以牺牲带宽资源作代价，有关内容将在第 3 章中介绍。

若原信号为 $f(t)$，尺度变换后得到 $y(t)$，表示为

$$y(t)=f(at) \tag{2.2-9}$$

其中，a 为实常数。$f(at)$（$a\neq 0$）的表达式是将 $f(t)$ 中的自变量 t 置换为 (at) 后的表达式。$f(at)$ 的波形是将 $f(t)$ 的波形沿时间轴压缩或扩展 $\frac{1}{|a|}$ 倍后得到的波形。当 $0<|a|<1$ 时，$f(at)$ 相对于 $f(t)$ 被扩展，值域的非零值区间范围变大；当 $|a|>1$ 时，$f(at)$ 相对于 $f(t)$ 被压缩，值域的非零值区间范围变小。信号的尺度变换如图 2.2-9 所示。

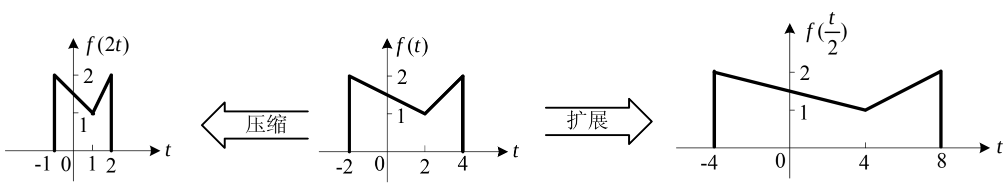


图 2.2-9　信号的尺度变换

当 $a<0$ 时，可以先求 $f(|a|t)$，再将其反褶，最后得到 $f(at)$。如果由 $f(t)$ 求信号 $f(at+b)$，一般情况下，先时移，然后反褶，最后尺度变换；求 $f(at+b)$ 的表达式时，将 $f(t)$ 中的自变量 t 置换为 $(at+b)$ 即可。

例 2.2-5　以图 2.2-9 中的信号 $f(t)$ 为原信号，求 $f(-\frac{1}{2}t+1)$ 的波形。

解 遵循先时移，然后反褶，最后尺度变换的顺序对原信号 $f(t)$ 进行变换，其波形如图 2.2-10 所示。

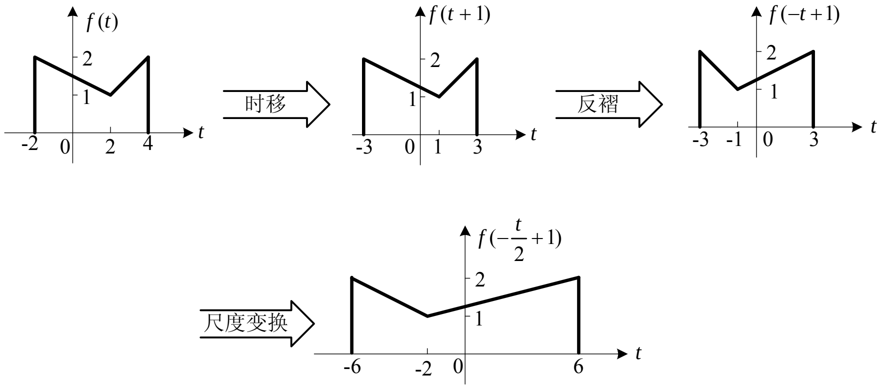


图 2.2-10 信号的变换

从图 2.2-9、图 2.2-10 可以看出，信号在尺度变换中无论是压缩还是扩展，得到的信号不仅在值域的非零值区间上发生了变化，其幅值也发生了变化，如图中的斜率变化。说明波形产生了失真。也就意味着经过尺度变换运算后信号将丢失其所传递的部分信息。

2.2.6 信号的分解

为了更好地分析信号的特性，可以将复杂信号分解为多个简单信号（基本信号）分量之和。

可以从不同的角度将任意信号 $f(t)$ 分解，如将其分解为直流分量与交流分量之和；分解为偶分量与奇分量之和；分解为脉冲或冲激信号之和（将在 2.7 节中介绍）；分解为正弦信号或复指数信号之和（将在第 3 章中介绍）。下面仅介绍前两种分解形式。

一般的周期信号 $f(t)$ 分解为直流分量与交流分量之和，即

$$f(t) = f_D + f_A(t) \tag{2.2-10}$$

其中，f_D 为直流分量，即为信号 $f(t)$ 的时间平均值，$f_D = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$，$T$ 为信号的周期，a 为任一时刻；$f_A(t)$ 为交流信号，是信号 $f(t)$ 去直流以后得到的交变信号。

例 2.2-6 将图 2.2-11 所示周期信号 $f(t)$ 分解为直流分量与交流分量。

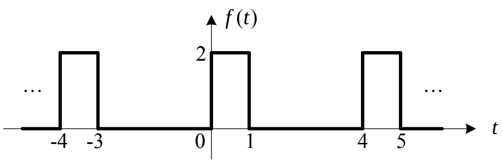


图 2.2-11 周期信号

解 信号 $f(t)$ 的直流分量为

$$f_D = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^1 2\,\mathrm{d}t = 0.5$$

交流分量为 $f_A(t)=f(t)-f_D$。

周期信号的直流分量与交流分量如图 2.2-12 所示。

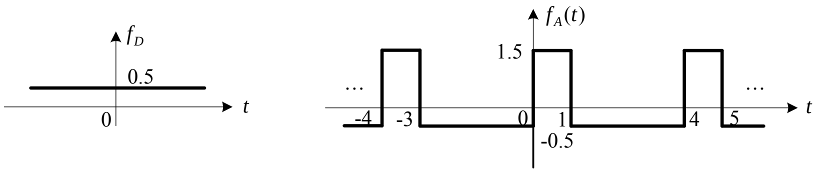


图 2.2-12　周期信号分解为直流分量与交流分量

任意信号 $f(t)$ 分解为偶分量 $f_e(t)$ 与奇分量 $f_o(t)$ 之和，即

$$f(t)=f_e(t)+f_o(t) \tag{2.2-11}$$

因任意信号可以表示为

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)+f(t)+f(-t)-f(-t)\right]=\frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]+\frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]$$

设 $f_e(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$， $f_o(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$，则有 $f(t)=f_e(t)+f_o(t)$。 $f_e(t)$ 为偶分量，满足 $f_e(t)=f_e(-t)$； $f_o(t)$ 为奇分量，满足 $f_o(t)=-f_o(-t)$。

例 2.2-7　将图 2.2-13 所示信号 $f(t)$ 分解为偶分量与奇分量。

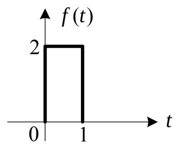
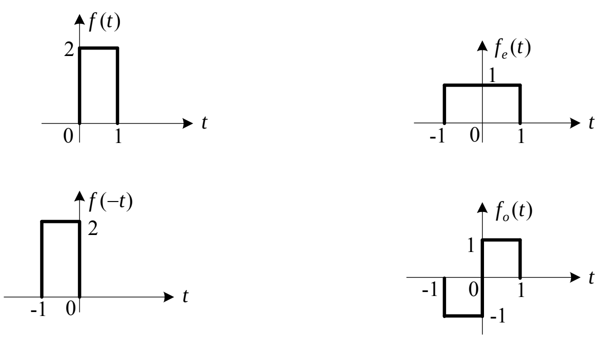


图 2.2-13　时限信号

解　原信号 $f(t)$ 及其反褶信号 $f(-t)$ 如图 2.2-14（a）所示，根据 $f_e(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$，$f_o(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$，求得偶分量 $f_e(t)$ 与奇分量 $f_o(t)$，如图 2.2-14（b）所示。



（a）原信号及其反褶信号　　　　（b）分解为偶分量及奇分量

图 2.2-14　时限信号的分解

上例是对时限信号的分解，对于周期信号的分解也是先由原信号 $f(t)$ 得到其反褶信号，

然后再由偶分量和奇分量的表达式求解。图 2.2-11 所示的周期信号分解为偶分量与奇分量的波形如图 2.2-15 所示。

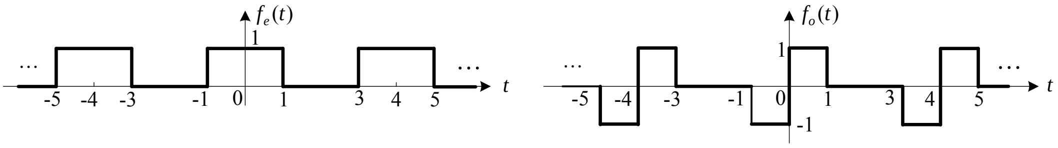


图 2.2-15　周期信号的分解

2.3　线性时不变连续系统

2.3.1　线性时不变系统的基本性质

线性时不变系统是既满足线性又满足时不变特性的系统，简记为 LTI（Linear Time Invariant）系统。本书主要讨论因果的 LTI 系统，下面详细阐述其线性和时不变特性。

1. 系统的线性特性

系统的线性特性是指系统同时具有叠加性和齐次性（均匀性）。叠加性是指，若干激励信号同时作用于系统产生的响应等于各个激励信号单独作用于系统产生的响应之和。齐次性是指，如果系统的输入激励变化为原来的 a 倍时，系统的输出响应也随之变化原来的 a 倍。

例如，激励信号 $x_1(t)$ 作用于系统产生的响应为 $y_1(t)$，简记为 $y_1(t)=T\left[\,x_1(t)\,\right]$；而激励信号 $x_2(t)$ 作用于系统产生的响应为 $y_2(t)$，简记为 $y_2(t)=T\left[\,x_2(t)\,\right]$；若当激励信号 $x_1(t)+x_2(t)$ 共同作用于系统所产生的响应为 $y_1(t)+y_2(t)$，即

$$T\left[\,x_1(t)+x_2(t)\,\right]=T\left[\,x_1(t)\,\right]+T\left[\,x_2(t)\,\right]=y_1(t)+y_2(t)$$

则说明系统满足叠加性。

此例还可以进一步简单表示为：若有 $x_1(t)\to y_1(t)$， $x_2(t)\to y_2(t)$，当系统存在如下关系

$$x_1(t)+x_2(t)\to y_1(t)+y_2(t)$$

则系统满足叠加性。

同样，设 a 为任意常数，若 $y(t)=T\left[\,x(t)\,\right]$，当系统存在如下关系：

$$T\left[\,ax(t)\,\right]=aT\left[\,x(t)\,\right]=ay(t)$$

则系统满足齐次性。

由线性系统的定义可得，若 $x_1(t)\to y_1(t)$， $x_2(t)\to y_2(t)$，则有

$$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\to a_1y_1(t)+a_2y_2(t) \tag{2.3-1}$$

以上所述为零状态系统，即不考虑由系统的初始储能产生的响应，仅考虑外加激励产生的响应。

动态系统的输出响应不仅决定于系统的输入激励，而且还与系统的初始储能有关，那么怎样将系统的初始储能考虑进去呢？当系统为非零状态时，系统的响应可以分成两部分：一部分是仅由系统的初始储能作用产生的响应，称为零输入响应，表示为 $y_{zi}(t)$；另一部分是仅由外加激励作用产生的响应，称为零状态响应，表示为 $y_{zs}(t)$，即系统的全响应为 $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$。此时，

当系统的零输入响应和零状态响应分别满足线性特性时，系统才是线性系统。

例 2.3-1 判断下列系统是否为线性系统。

（1） $y(t)=x(t)-x(2-t)$

（2） $y(t)=2x(t)-t$

（3） $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+y(t)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)-2y(t)=x(t)$

（4） $y(t)=[x(t)]^2$

解 （1）已知 $x_1(t)\to y_1(t)=x_1(t)-x_1(2-t)$， $x_2(t)\to y_2(t)=x_2(t)-x_2(2-t)$，则

$$\begin{aligned}T\left[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\right]&=\left[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\right]-\left[a_1x_1(2-t)+a_2x_2(2-t)\right]\\&=a_1\left[x_1(t)-x_1(2-t)\right]+a_2\left[x_2(t)-x_2(2-t)\right]\\&=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)\end{aligned}$$

所以该系统为线性系统。另外，通过直接观察本小题的方程，可以判断出是线性方程，其所对应的系统一定是线性系统。

（2）已知 $x_1(t)\to y_1(t)=2x_1(t)-t$， $x_2(t)\to y_2(t)=2x_2(t)-t$，则

$$T\left[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\right]=2\left[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\right]-t=2a_1x_1(t)+2a_2x_2(t)-t$$

而 $a_1y_1(t)+a_2y_2(t)=a_1\left[2x_1(t)-t\right]+a_2\left[2x_2(t)-t\right]$，即

$$T\left[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\right]\neq a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$$

所以该系统为非线性系统。

（3）通过直接观察微分方程是否含有因变量与其各阶导数之积，是否含因变量或其导数的高次方项（不低于二次方），可以判断出微分方程是否具有线性，从而得出系统是否是线性系统。

因为本小题含有因变量与其一阶导数之积 $y(t)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)$，所以该系统为非线性系统。

（4）通过直接观察方程发现，激励为二次方项，所以该系统为非线性系统。

从频域的角度上看，线性系统具有频率的保持性。即信号通过线性系统后不会产生新的频率分量。例如当线性系统的输入信号含有角频率为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 的成分，则系统输出的稳态响应也只能含有这些频率成分，有时由于滤波作用，输出的频率成分会减少，但绝不会增加。

有关线性系统的频域分析将在第 3 章中进行介绍。

2. 系统的时不变特性

由于时不变系统的元件参数不随时间改变，所以系统的零状态响应形式与激励信号的接入时刻无关，即当激励延迟时间 τ 时，其响应也同样延迟时间 τ，波形形状不变，如图 2.3-1 所示。

电信号在传递过程中，随着时间和距离的变化，其幅值大小也会发生变化，但波形不会发生变化。因此这样的电系统就称为时不变系统。

线性系统可以是时不变系统，也可以是时变系统。判断系统是否为时不变系统的方法为：

（1）当描述系统输入与输出关系为常系数微分方程时，系统为时不变系统。

（2）一般情况下，已知 $x(t)\to y(t)$，若系统存在如下关系：

$$T\left[x(t-\tau)\right]=y(t-\tau) \qquad (2.3\text{-}2)$$

则系统为时不变系统。

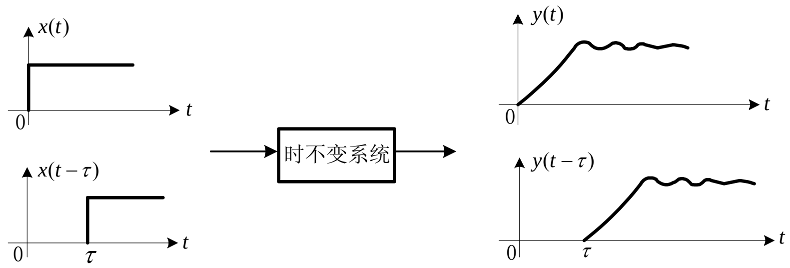


图 2.3-1　时不变系统示意图

例 2.3-2　判断例 2.3-1 的各系统是否为时不变系统。

解　（1）由已知 $x(t) \to y(t) = x(t) - x(2-t) = x(t) - x(-t+2)$，可得

$$T\left[\, x(t-\tau) \,\right] = x(t-\tau) - x(-t-\tau+2)$$

而

$$y(t-\tau) = x(t-\tau) - x[-(t-\tau)+2]$$

显然，存在

$$T\left[\, x(t-\tau) \,\right] \neq y(t-\tau)$$

所以该系统为时变系统。

（2）由已知 $x(t) \to y(t) = 2x(t) - t$，可得

$$T\left[\, x(t-\tau) \,\right] = 2x(t-\tau) - t$$

而

$$y(t-\tau) = 2x(t-\tau) - (t-\tau)$$

显然，$T\left[\, x(t-\tau) \,\right] \neq y(t-\tau)$，所以系统为时变系统。

（3）观察表达式可知，其方程中各项系数均为常系数，即为常系数微分方程。必然满足 $T\left[\, x(t-\tau) \,\right] = y(t-\tau)$，所以系统为时不变系统。

（4）由已知 $x(t) \to y(t) = [x(t)]^2$，可得

$$T\left[\, x(t-\tau) \,\right] = [x(t-\tau)]^2$$

而

$$y(t-\tau) = [x(t-\tau)]^2$$

显然，$T\left[\, x(t-\tau) \,\right] = y(t-\tau)$，所以系统为时不变系统。

3. 线性时不变系统的特性

由上述分析可以看出，系统的线性特性和时不变特性是系统的两个重要特性，它们是两个不同的概念。也就是说，线性系统可以是时不变的，也可以是时变的。而对于线性时不变系统应同时满足线性特性和时不变特性，即若 $x_1(t) \to y_1(t)$，$x_2(t) \to y_2(t)$，则

$$a_1x_1(t-t_1) + a_2x_2(t-t_2) \to a_1y_1(t-t_1) + a_2y_2(t-t_2) \tag{2.3-3}$$

判断系统是否为线性时不变系统的方法是：

（1）当系统的微分方程是常系数的线性微分方程时，系统为线性时不变系统。

（2）一般情况下，可分别判断系统是否满足线性和时不变性。

另外，线性时不变系统还具有微积分特性。微积分特性是指若 $x(t) \to y(t)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \to \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \qquad 及 \qquad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

即输入信号微分或积分，经系统作用后的输出信号也微分或积分。

4. 线性时不变系统的因果特性

若线性时不变系统满足因果特性，则此系统为线性时不变因果系统。

例 2.3-3 判断输入输出关系为 $y(t) = x(t-1) + x(t+2)$ 的系统是否为线性时不变因果系统。

解 由系统的输入输出关系，就可以容易地判断出该系统为线性时不变系统。而当 $t = 0$ 时，系统的输出为

$$y(0) = x(-1) + x(2)$$

上式可以理解为 0 时刻的输出等于（−1）时刻（在 0 时刻之前）的输入与 2 时刻（在 0 时刻之后）的输入之和，显然该系统的响应与系统未来的激励有关，所以该系统为非因果系统。

2.3.2 线性时不变系统的模拟

1. 系统的基本部件及其运算关系

系统除了可以抽象为数学模型以外，还可以借助一些能够反映输入与输出关系的理想运算单元的组合来表示系统。将这些具有某种特定运算功能的运算单元称为基本部件。常用的基本部件符号及其运算关系如图 2.3-2 所示。

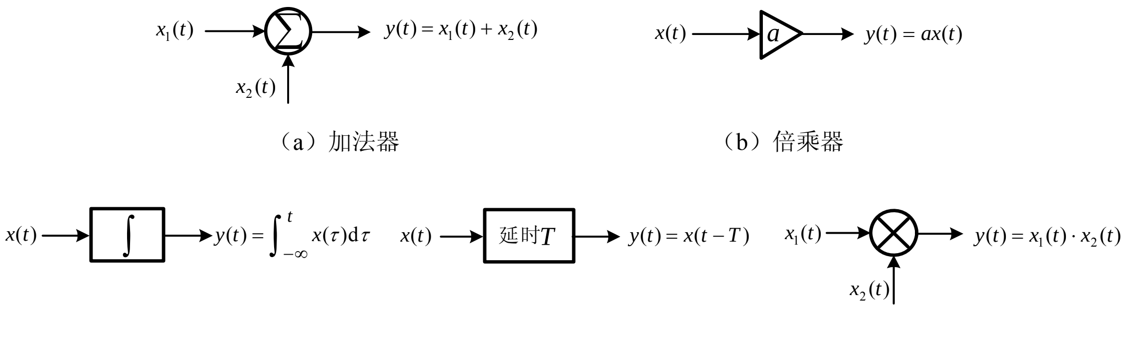


图 2.3-2 系统的基本部件

2. 线性时不变系统的模拟

在进行系统分析时，首先要建立系统的数学模型，然后对系统的数学模型进行求解。即在给定输入激励和一定边界条件的情况下，运用数学方法求系统的输出响应。随着计算机技术的发展和普及，采用计算机仿真技术对系统进行分析已经成为系统分析与设计的重要手段。

系统的模拟是采用几种基本部件的组合形式来描述系统的，并使其与被模拟系统的数学模型相对应，从而实现对系统的计算机仿真。通过计算机仿真实验可以更加快捷、方便地获得系统分析的结果，对于实际物理系统的设计与调试具有重要的工程意义。

例如，如图 2.3-3 所示的 RC 电路，根据电路理论，不难得出输入与输出关系的数学模型为

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{RC}x(t) \tag{2.3-4}$$

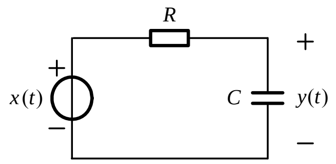


图 2.3-3　RC 电路

式（2.3-4）为一阶常系数线性微分方程。将式（2.3-4）两边对时间积分

$$y(t)+\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

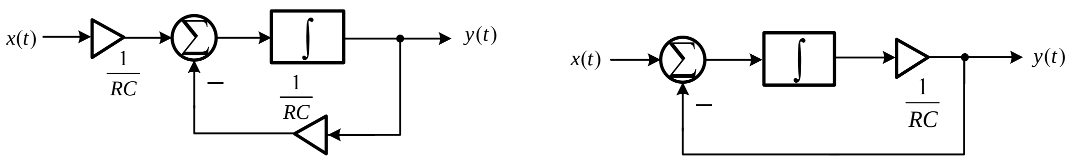
整理后得

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[\frac{1}{RC}x(\tau)-\frac{1}{RC}y(\tau)\right]\mathrm{d}\tau \tag{2.3-5}$$

由式（2.3-5）可画出 RC 电路的模拟框图，如图 2.3-4（a）所示。从系统设计的角度上看，系统的结构应尽量简单，以利于降低成本，提高可靠性等。因而，还可将式（2.3-5）整理为

$$y(t)=\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t}[x(\tau)-y(\tau)]\,\mathrm{d}\tau \tag{2.3-6}$$

由式（2.3-6）可画出的模拟框图如图 2.3-4（b）所示。



（a）　　（b）

图 2.3-4　RC 电路的模拟框图

3. 子系统之间的连接

一个系统往往由若干子系统有机组合而成。子系统之间的连接方式一般为串联（又称级联）和并联两种基本形式。

两个子系统的串并联分别如图 2.3-5 和图 2.3-6 所示。

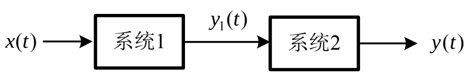


图 2.3-5　两个子系统串联

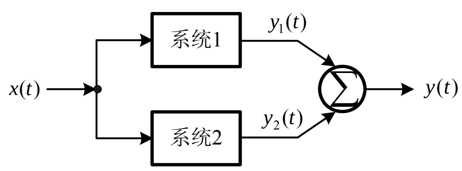


图 2.3-6　两个子系统并联

由图 2.3-5 可知，系统 1 的输入为 $x(t)$，输出为 $y_1(t)$；而 $y_1(t)$ 又作为系统 2 的输入，则系统总的输出为

$$y(t)=T_2[\,y_1(t)]=T_2[\,T_1[x(t)]\,] \tag{2.3-7}$$

同样，由图 2.3-6 可得系统总的输出为

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = T_1\left[x(t)\right] + T_2\left[x(t)\right] \tag{2.3-8}$$

由两个子系统的串并联关系，可以推导出多个子系统的串联、并联和混联（既有串联又有并联）时系统的输入与输出关系。

2.4 LTI 连续系统的模型

系统模型是指对实际系统物理特性的数学抽象，以数学表达式或具有理想特性的符号组合而成的图形来表征系统的特性。例如，在电路理论中的电路模型就是一种反映输入与输出具有某种关系的数学模型。

系统模型的建立是系统分析中非常重要的一个问题，特别是一些复杂的系统，涉及到许多专业方面的知识。本节着重讨论简单 LTI 连续系统模型的建立，明确系统模型与数学模型之间的对应关系，为建立复杂系统的模型奠定基础。

2.4.1 LTI 连续系统的数学模型

由电路理论可知，对于任意一个线性时不变电路，当电路结构和组成电路的元件参数确定以后，根据电路的两个约束关系，即元件的伏安关系和基尔霍夫定律，可以建立起与该电路对应的动态方程。

例如，如图 2.4-1 所示的 RLC 电路中，激励 $x(t)$ 为电压源电压，响应为电容的电压 $y(t)$ 。

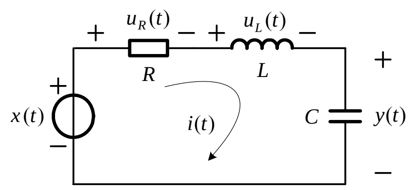


图 2.4-1　RLC 电路

根据基尔霍夫（KVL）定律，不难得出

$$u_R(t) + u_L(t) + y(t) = x(t)$$

同样，根据元件的伏安关系，又可以得出

$$u_R(t) = R\,i(t)$$

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

经整理后，得到 RLC 电路的数学模型为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}x(t) \tag{2.4-1}$$

该式是二阶常系数线性微分方程，其描述的电路为二阶 LTI 系统。

上述二阶 LTI 系统的数学模型写成一般表达式为

$$y^{(2)}(t)+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=b_0x(t) \tag{2.4-2}$$

2.4.2 LTI 连续系统的框图

由前所述可知，LTI 连续系统还可以用具有理想特性的符号组合而成的图形来表征系统特性，即用模拟框图来表示系统。它形象地说明了输入与输出关系，并与系统的数学模型形成相互对应的关系。

图 2.4-2 所示为一个二阶 LTI 系统的模拟框图。

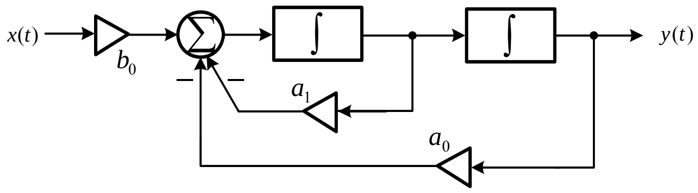


图 2.4-2 二阶系统的模拟框图

根据图 2.4-2 中各个基本部件的运算关系可得其数学模型为

$$y^{(2)}(t)+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=b_0x(t)$$

由以上分析可以看出，二阶 LTI 系统一定是由线性时不变元（部）件组成，且仅包含有两个独立的动态元（部）件。图 2.4-1 中是电感和电容，图 2.4-2 中是两个积分器，虽然组成系统的元（部）件不同，但它们都具有相同的数学模型，反映出它们具有相同的系统动态特性。

不难得出结论，LTI 连续系统的数学模型是常系数的线性微分方程。n 阶 LTI 系统一般是含有多个独立的动态元（部）件的系统，其输入 $x(t)$ 与输出 $y(t)$ 之间的关系为 n 阶常系数的线性微分方程，即

$$\begin{aligned}&y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)\\&=b_mx^{(m)}(t)+b_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1x^{(1)}(t)+b_0x(t)\end{aligned} \tag{2.4-3}$$

式中 n 和 m 均为正整数，$a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 和 $b_m,b_{m-1},\cdots,b_1,b_0$ 为常系数。

2.5 LTI 连续系统的零输入响应

2.5.1 系统的初始条件

建立系统的数学模型后，在给定激励下求系统的响应还需要知道动态系统的初始条件。

1. 系统的初始状态

对于动态电网络，电容器、电感器分别具有储存电场能、磁场能的特性，电容电压 $v_C(t)$、电感电流 $i_L(t)$ 反映了储能情况，一般为平稳变化的量，不会发生突变。假设以 $t=t_0$ 时刻为时间分界点，并将 t_0 时刻前的一瞬间记为 t_0^-，t_0 时刻后的一瞬间记为 t_0^+。而 $v_C(t_0^-)$ 和 $i_L(t_0^-)$ 记忆了 $(-\infty,t_0)$ 期间激励作用于系统的全部历史信息，并对 $t>t_0$ 时的系统输出产生影响，称 $v_C(t_0^-)$

和 $i_L(t_0^-)$ 为系统的状态值。一般情况下，时间的起始点为 $t=0$ 时刻，所以系统的状态值为 $v_C(0^-)$ 和 $i_L(0^-)$。n 阶系统有 n 个状态值，分别为 0^- 时刻各电容的电压值、各电感的电流值。系统的初始值与接入的激励和在接入激励时系统的状态息息相关。

根据各电容及电感的状态值能够确定在 $t=0^-$ 时刻系统的响应 $y(0^-)$ 及其响应的各阶导数 $y^{(k)}(0^-)$（$k=1,2,\cdots,n-1$），称这一组数据为 n 阶系统的初始状态。

2. *系统的初始值*

可以认为，系统在 $t=0^-$ 时刻已经达到稳定状态，即系统中储能元件电容电压 $v_C(t)$ 和电感电流 $i_L(t)$ 不再发生变化，此时，电容相当于开路，电感相当于短路。在 $t=0^+$ 时刻，由于储能的连续性，电容电压 $v_C(t)$ 和电感电流 $i_L(t)$ 在一般情况下均不发生突变，即 $v_C(0^+)=v_C(0^-)$，$i_L(0^+)=i_L(0^-)$。此时，由外加激励 $x(0^+)$ 及系统的 $v_C(0^+)$、$i_L(0^+)$ 共同作用所确定的 n 阶系统的响应 $y(0^+)$ 及其各阶导数 $y^{(k)}(0^+)$，称这一组数据为系统的初始值。

一般情况下，由于外加激励的作用或系统内部结构和参数发生变化，使得系统的初始值与初始状态不等，即

$$\begin{cases} y(0^+)\neq y(0^-) \\ y^{(k)}(0^+)\neq y^{(k)}(0^-) \end{cases} \tag{2.5-1}$$

这样，在进行系统分析时，只能利用初始值这一组初始条件，而不能用初始状态。

系统的初始值可以分解为零输入初始值与零状态初始值。仅由系统初始储能 $v_C(0^+)$、$i_L(0^+)$ 所确定的初始值 $y_{zi}(0^+)$ 及 $y_{zi}^{(k)}(0^+)$ 称为零输入初始值；仅由外加激励 $x(0^+)$ 所确定的初始值 $y_{zs}(0^+)$ 及 $y_{zs}^{(k)}(0^+)$ 称为零状态初始值，即有

$$\begin{cases} y(0^+)=y_{zi}(0^+)+y_{zs}(0^+) \\ y^{(k)}(0^+)=y_{zi}^{(k)}(0^+)+y_{zs}^{(k)}(0^+) \end{cases} \tag{2.5-2}$$

在零输入条件下，且系统的内部结构和参数不发生变化时，有

$$\begin{cases} y(0^+)=y_{zi}(0^+)=y_{zi}(0^-)=y(0^-) \\ y^{(k)}(0^+)=y_{zi}^{(k)}(0^+)=y_{zi}^{(k)}(0^-)=y^{(k)}(0^-) \end{cases} \tag{2.5-3}$$

所以，当给定系统的数学模型和激励后，如何确定系统的初始值就显得非常重要。

3. *初始状态和初始值的确定*

通常在给定电网络的情况下，确定初始状态和初始值的一般方法和步骤，通过例 2.5-1 进行说明。

例 2.5-1　电路如图 2.5-1 所示，其中 $C=1\,\text{F}$，$R_1=R_2=1\Omega$，激励信号

$$x(t)=\begin{cases} 2\ \text{V} & t<0 \\ 4\text{e}^{-t}\ \text{V} & t\geqslant 0 \end{cases}$$

试确定初始状态 $y(0^-)$ 及初始值 $y(0^+)$。

解　（1）求动态元件的状态值 $v_C(0^-)$。

当 $t<0$ 时，$x(t)$=2V 为直流，电路处于稳态，电容相当于开路。其 0^- 等效电路如图 2.5-2 所示。由 0^- 等效电路可得

$$v_C(0^-) = 1\text{V}$$

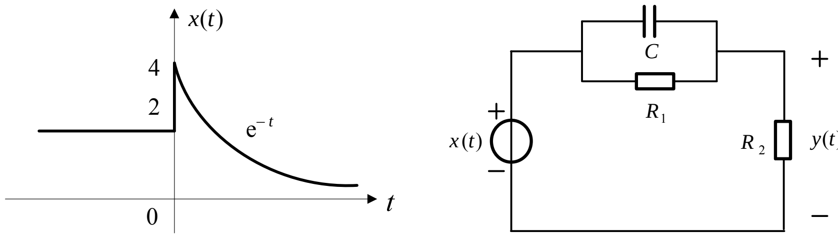


图 2.5-1　例 2.5-1 图

（2）根据状态值 $v_C(0^-)$，求电路响应的初始状态 $y(0^-)$。

根据电路分析，可得

$$y(t) = x(t) - v_C(t)$$

则

$$y(0^-) = x(0^-) - v_C(0^-) = 1\text{V}$$

（3）根据 $v_C\,(0^+)$，求电路响应的初始值 $y(0^+)$。

由于电容电压 $v_C(t)$ 不能发生突变，因此可得

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 1\,\text{V}$$

则画出 0^+ 等效电路（C 以独立电压源代替），如图 2.5-3 所示。

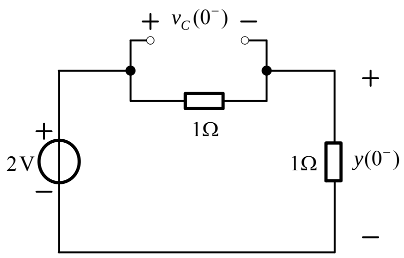


图 2.5-2　0^-等效电路

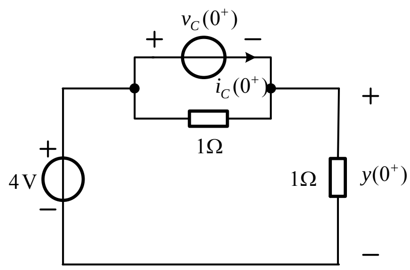


图 2.5-3　0^+等效电路

根据电路分析，得

$$y(0^+) = x(0^+) - v_C(0^+) = 4 - 1 = 3\,\text{V}$$

通过以上分析可以看出，由于外加激励的作用，使得

$$y(0^+) \neq y(0^-)$$

如果将激励信号改为 $x(t) = \begin{cases} 2\ \text{V} & t < 0 \\ 2\text{e}^{-t}\ \text{V} & t \geqslant 0 \end{cases}$，此时，在 $t = 0$ 时，$x(0^+) = x(0^-)$，激励信号连续变化，则

$$y(0^+) = y(0^-)$$

从而也进一步说明，激励信号的跃变作用对初始值和初始状态的影响。

2.5.2 零输入响应

LTI 连续系统的响应可以分解为零输入响应和零状态响应之和，即

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t) \tag{2.5-4}$$

其中，$y_{zi}(t)$ 为零输入响应，它仅仅是由系统的初始储能产生的响应；$y_{zs}(t)$ 为零状态响应，它仅仅是由系统的外加激励产生的响应。

零输入响应是指系统无外加激励，即激励信号 $x(t)=0$，这时仅由系统的初始储能产生的响应。由式（2.4-3）表示的系统方程可得

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=0 \tag{2.5-5}$$

该式为齐次微分方程，其特征方程为

$$s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0 \tag{2.5-6}$$

对其进行因式分解

$$(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)=0$$

其中，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为方程的 n 个特征根。根据特征根的不同情况，零输入响应将具有不同的形式。

（1）当特征根均为单根时，零输入响应的一般形式为

$$y_{zi}(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i\mathrm{e}^{p_it} \tag{2.5-7}$$

其中，p_i 为各个单根；A_i 为单根对应指数项的待定系数。

（2）当特征根中含有 k 重根，其他为单根时，零输入响应的一般形式为

$$y_{zi}(t)=\mathrm{e}^{p_1t}\sum_{i=1}^{k}A_it^{(i-1)}+\sum_{j=k+1}^{n}A_j\mathrm{e}^{p_jt} \tag{2.5-8}$$

其中，p_1 为 k 重根，A_i 为重根对应各项的待定系数；p_j 为各个单根，A_j 为单根对应指数项的待定系数。

由此可见，零输入响应是齐次方程的解。零输入响应的形式只与系统的结构和参数有关，即与系统数学模型的系数有关；而待定系数的大小要由系统在 0^+ 时刻的初始值 $y_{zi}(0^+)$ 和 $y_{zi}^{(k)}(0^+)$ 来确定。

在零输入条件下，若系统的内部结构和参数不发生变化，则有 $y(0^+)=y_{zi}(0^+)=y(0^-)$，$y^{(k)}(0^+)=y_{zi}^{(k)}(0^+)=y^{(k)}(0^-)$。需要注意的是，零输入响应虽然是齐次方程的解，但不是系统的齐次解。

例 2.5-2 已知某系统的数学模型为 $y^{(1)}(t)+3y(t)=x(t)$，激励 $x(t)=\mathrm{e}^{-4t}u(t)$，系统的初始状态 $y(0^-)=5$，求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$。

解 系统的零输入响应满足方程

$$y_{zi}^{(1)}(t)+3y_{zi}(t)=0$$

由特征方程 $s+3=0$ 得特征根 $s=-3$，则零输入响应的形式为

$$y_{zi}(t)=A\mathrm{e}^{-3t} \quad t\geqslant 0$$

由系统的初始值求待定系数，得 $y_{zi}(0^+)=y(0^-)=A=5$，所以零输入响应为

$$y_{zi}(t)=5\mathrm{e}^{-3t} \qquad t\geqslant 0$$

例 2.5-3 某二阶系统的数学模型为 $y^{(2)}(t)+4y^{(1)}(t)+3y(t)=x(t)$，已知系统的初始状态 $y(0^-)=1$，$y^{(1)}(0^-)=3$，激励 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$。

解 系统的零输入响应满足方程

$$y_{zi}^{(2)}(t)+4y_{zi}^{(1)}(t)+3y_{zi}(t)=0$$

由特征方程 $s^2+4s+3=0$，求得特征根 $s_1=-1$，$s_2=-3$，则零输入响应的形式为

$$y_{zi}(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-3t} \qquad t\geqslant 0$$

其一阶导数为 $y_{zi}^{(1)}(t)=-A_1\mathrm{e}^{-t}-3A_2\mathrm{e}^{-3t}$，由系统的初始值可以得到

$$\begin{cases} y_{zi}(0^+)=y(0^-)=A_1+A_2=1 \\ y_{zi}^{(1)}(0^+)=y^{(1)}(0^-)=-A_1-3A_2=3 \end{cases}$$

解得待定系数 $A_1=3$，$A_2=-2$，所以系统的零输入响应为

$$y_{zi}(t)=3\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-3t} \qquad t\geqslant 0$$

由上述分析归纳出零输入响应的几种可能形式，如表 2-1 所示。利用此表可以简化解题步骤。

表 2-1 零输入响应形式对照表

方程阶次	一般方程（零输入条件）	特征根	零输入响应形式（$t\geqslant 0$）	待定系数的求解
一阶	$y^{(1)}(t)+a_0y(t)=0$	$s=-a_0$	$y_{zi}(t)=A\mathrm{e}^{st}$	$A=y_{zi}(0^+)$
二阶	$y^{(2)}(t)+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=0$	s_1、s_2 为单实根	$y_{zi}(t)=A_1\mathrm{e}^{s_1t}+A_2\mathrm{e}^{s_2t}$	$\begin{cases} A_1+A_2=y_{zi}(0^+) \\ s_1A_1+s_2A_2=y_{zi}^{(1)}(0^+) \end{cases}$
		$s_1=s_2=s$ 为重根	$y_{zi}(t)=\left(A_1+A_2t\right)\mathrm{e}^{st}$	$\begin{cases} A_1=y_{zi}(0^+) \\ sA_1+A_2=y_{zi}^{(1)}(0^+) \end{cases}$
		$s_{1,2}=\alpha\pm \mathrm{j}\beta$ 为复根	$y_{zi}(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}(A_1\cos\beta t+A_2\sin\beta t)$	$\begin{cases} A_1=y_{zi}(0^+) \\ \alpha A_1+\beta A_2=y_{zi}^{(1)}(0^+) \end{cases}$

例 2.5-4 电路如图 2.5-4 所示。$t=0$ 以前，开关位于 1 位置，且已进入稳态。$t=0$ 时刻开关 S 转至 2 位置。求电路的零输入响应 $i_{zi}(t)$。

解 开关 S 转至 2 位置后，由电路理论可得

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)\mathrm{d}\tau+Ri(t)=x(t)$$

对上式等号两边分别求导，得到电路的数学模型为

$$i^{(2)}(t)+2i^{(1)}(t)+i(t)=x^{(1)}(t)$$

电路的零输入响应满足方程

$$i_{zi}^{(2)}(t)+2i_{zi}^{(1)}(t)+i_{zi}(t)=0$$

由特征方程 $s^2+2s+1=0$，求得特征根 $s_1=s_2=-1$，查表 2-1 可得零输入响应形式为

$$i_{zi}(t)=(A_1+A_2 t)\mathrm{e}^{-t} \qquad t\geqslant 0$$

其一阶导数为

$$i_{zi}^{(1)}(t)=(A_2-A_1-A_2 t)\mathrm{e}^{-t}$$

要求解待定系数，必须先确定响应的初始值 $i_{zi}(0^+)$ 和 $i_{zi}^{(1)}(0^+)$。由图 2.5-4 可知，在 $t=0^-$ 时，电路达到稳态，电容相当于开路，电感相当于短路，由此得到电路的状态值 $i(0^-)=0$，$v_C(0^-)=8\mathrm{V}$。根据换路定律，有

$$i(0^+)=i(0^-)=0$$

$$v_C(0^+)=v_C(0^-)=8\mathrm{V}$$

在零输入的条件下，0^+ 等效电路如图 2.5-5 所示。此时，由于电路结构发生了变化，电路的初始值与初始状态有可能不等，必须求得零输入的初始值，即

$$i_{zi}(0^+)=i(0^+)=0$$

$$v_{Lzi}(0^+)=-8\mathrm{V}$$

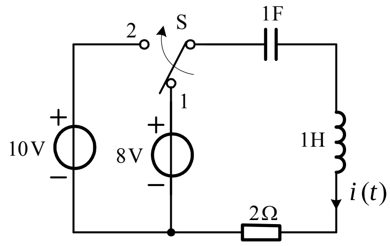


图 2.5-4　例 2.5-4 图

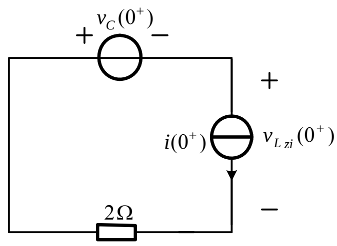


图 2.5-5　零输入条件下的 0^+ 等效电路

由电感的伏安关系，$v_{Lzi}(0^+)=L\left.\dfrac{\mathrm{d}i_{zi}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}=Li_{zi}^{(1)}(0^+)$，得 $i_{zi}^{(1)}(0^+)=-8$，故有

$$\begin{cases} i_{zi}(0^+)=A_1=0 \\ i_{zi}^{(1)}(0^+)=A_2-A_1=-8 \end{cases}$$

所以系统的零输入响应为

$$i_{zi}(t)=-8t\,\mathrm{e}^{-t} \qquad t\geqslant 0$$

零状态响应是指系统没有初始储能，系统的初始状态为零，即 $y(0^-)=y^{(1)}(0^-)=\cdots=y^{(n-1)}(0^-)=0$，这时仅由系统的外加激励所产生的响应称为零状态响应。关于零状态响应的求解在 2.7 节中介绍。

2.6　LTI 连续系统的冲激响应与阶跃响应

为了能够利用卷积法求解零状态响应，本节重点介绍冲激响应。并依据 LTI 连续系统的微积分特性可以方便地由冲激响应得到阶跃响应，反之亦然。

2.6.1 冲激信号的性质

在 2.1 节中对冲激信号的概念已经作了一些介绍，为了更好地理解和应用单位冲激信号，下面介绍一下单位冲激信号 $\delta(t)$ 的一般性质。

1. $\delta(t)$ 的抽样特性

若连续时间信号 $f(t)$ 在 $t=0$ 连续，则有

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t) \tag{2.6-1}$$

同样，若连续时间信号 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 连续，则有

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{2.6-2}$$

如图 2.6-1 所示。

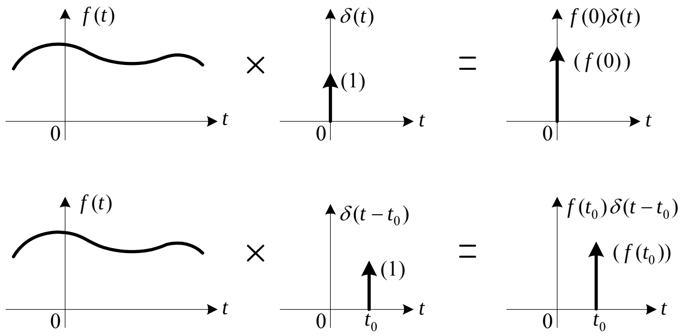


图 2.6-1 $\delta(t)$ 的抽样特性

式（2.6-1）表明，任意连续信号 $f(t)$ 与单位冲激信号 $\delta(t)$ 相乘，可以得到一个强度为 $f(0)$ 的一般冲激信号；式（2.6-2）表明，任意连续信号 $f(t)$ 与 $\delta(t-t_0)$ 相乘，可以得到一个只在 $t=t_0$ 时强度为 $f(t_0)$ 的一般冲激信号，其中 $f(0)$ 和 $f(t_0)$ 均表示 $f(t)$ 在对应时刻的抽样值。

2. $\delta(t)$ 的筛选特性

若连续时间信号 $f(t)$ 在 $t=0$ 连续，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t=f(0) \tag{2.6-3}$$

同样，若连续时间信号 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 连续，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=f(t_0) \tag{2.6-4}$$

式（2.6-3）和式（2.6-4）表明，利用 $\delta(t)$ 的抽样性能够将 $f(t)$ 的数值筛选出来。

3. $\delta(t)$ 的奇偶性

$\delta(t)$ 为一偶函数，即

$$\delta(t)=\delta(-t) \tag{2.6-5}$$

有关奇偶性的证明可以查阅相关书籍，这里从略。

4. $\delta(t)$ 的尺度变换特性

$\delta(t)$ 的尺度变换特性，即

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \qquad a\neq 0 \tag{2.6-6}$$

利用 $\delta(t)$ 的定义可以得到证明。

式（2.6-6）表明，$\delta(t)$ 的尺度变换仍然是冲激信号 $\delta(t)$，只是其强度发生了变化。

5. $\delta^{(1)}(t)$ 的特性

$\delta^{(1)}(t)$ 为一奇函数，即

$$\delta^{(1)}(t) = -\delta^{(1)}(-t) \tag{2.6-7}$$

设信号 $f(t)$ 及其导数在 $t=0$ 连续，则有

$$f(t)\delta^{(1)}(t) = f(0)\delta^{(1)}(t) - f^{(1)}(0)\delta(t) \tag{2.6-8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t = -f^{(1)}(0) \tag{2.6-9}$$

有关 $\delta^{(1)}(t)$ 特性的证明可以查阅相关书籍，这里从略。

同样还可以得出

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(1)}(t-t_0)\,\mathrm{d}t = -f^{(1)}(t_0) \tag{2.6-10}$$

例 2.6-1 利用 $\delta(t)$ 的性质化简下列各式。

（1）$\cos\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)\delta\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)$　　（2）$\int_{-\infty}^{\infty} 2\mathrm{e}^{-t}\delta(t)\mathrm{d}t$

（3）$(t^2-t+1)\delta(2t)$　　（4）$\int_{-5}^{5}\delta^{(1)}(t)(t^2+t-2)\,\mathrm{d}t$

解　（1）$\cos\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)\delta\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}\right)\delta\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\delta\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)$

（2）$\int_{-\infty}^{\infty} 2\mathrm{e}^{-t}\delta(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(t)\mathrm{d}t = 2$

（3）$(t^2-t+1)\delta(2t) = (t^2-t+1)\dfrac{1}{2}\delta(t) = \dfrac{1}{2}\delta(t)$

（4）$\int_{-5}^{5}\delta^{(1)}(t)(t^2+t-2)\,\mathrm{d}t = -\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2+t-2)\right]\Bigg|_{t=0} = -(2t+1)\big|_{t=0} = -1$

2.6.2 冲激响应

以单位冲激信号 $\delta(t)$ 作为激励，LTI 连续系统产生的零状态响应称为单位冲激响应，简称冲激响应，记为 $h(t)$。冲激响应示意图如图 2.6-2 所示。

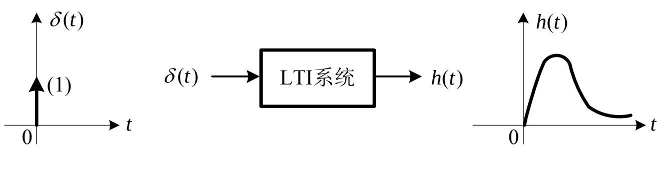


图 2.6-2　冲激响应示意图

冲激信号与冲激响应的关系简单地表示为

$$h(t) = T[\delta(t)] \qquad \text{或} \qquad \delta(t) \to h(t)$$

由于冲激响应能够反映系统本身的特性，同时它又是利用卷积求零状态响应的基础，所以，在信号与系统的分析中，研究和分析系统的冲激响应具有重要的实际意义。

1．由系统的微分方程求解冲激响应

系统的一般微分方程为

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=b_mx^{(m)}(t)+b_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1x^{(1)}(t)+b_0x(t)$$

当激励 $x(t)=\delta(t)$ 时，响应 $y(t)=h(t)$，则

$$\begin{aligned}&h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h^{(1)}(t)+a_0h(t)\\&=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta^{(1)}(t)+b_0\delta(t)\end{aligned} \tag{2.6-11}$$

式（2.6-11）可以理解为：冲激响应是冲激信号及其各阶导数作为系统的激励，单独作用于系统时产生响应的线性叠加。

设 $h_1(t)$ 满足

$$h_1^{(n)}(t)+a_{n-1}h_1^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h_1^{(1)}(t)+a_0h_1(t)=\delta(t) \tag{2.6-12}$$

即 $\delta(t)\to h_1(t)$，应用系统的线性时不变特性，则

$$\begin{aligned}&b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta^{(1)}(t)+b_0\delta(t)\ \to\\&\qquad h(t)=b_mh_1^{(m)}(t)+b_{m-1}h_1^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1h_1^{(1)}(t)+b_0h_1(t)\end{aligned} \tag{2.6-13}$$

对于式（2.6-12），当 $t>0$ 之后，$\delta(t)=0$，则

$$h_1^{(n)}(t)+a_{n-1}h_1^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h_1^{(1)}(t)+a_0h_1(t)=0 \tag{2.6-14}$$

该式表明，$\delta(t)$ 的作用只存在于 $t=0$ 时刻，相当于在 $t=0$ 时刻系统储存能量；在 $t>0$ 以后，又由系统的储能产生的零输入响应。显然，它是一个很特殊的响应。此时求 $h_1(t)$ 转化为求齐次方程的解，其求解方法与求零输入响应的方法相似，不同的是响应中待定系数的确定。

从式（2.6-12）可以看出，要使方程等号成立，等式左边最高阶项 $h_1^{(n)}(t)$ 中应含有冲激项 $\delta(t)$，那么在 $h_1^{(n-1)}(t)$ 项中必然含有阶跃项 $u(t)$，也就是说，对于 $h_1^{(n-1)}(t)$ 在 $t=0$ 时刻存在突变，即

$$h_1^{(n-1)}(0^+)\neq h_1^{(n-1)}(0^-) \tag{2.6-15}$$

而在 $h_1^{(n-2)}(t)$ 项中必然含有斜变项 $R(t)$，对于 $h_1^{(n-2)}(t)$ 在 $t=0$ 时刻连续，即

$$h_1^{(n-2)}(0^+)=h_1^{(n-2)}(0^-) \tag{2.6-16}$$

依此类推，低阶项在 $t=0$ 时刻均连续。

对式（2.6-12）进行积分，即

$$\int_{0^-}^{0^+}\left[h_1^{(n)}(t)+a_{n-1}h_1^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h_1^{(1)}(t)+a_0h_1(t)\right]\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,\mathrm{d}t$$

结果为

$$\begin{aligned}&\left[h_1^{(n-1)}(0^+)-h_1^{(n-1)}(0^-)\right]+a_{n-1}\left[h_1^{(n-2)}(0^+)-h_1^{(n-2)}(0^-)\right]+\cdots\\&\qquad+a_1\left[h_1(0^+)-h_1(0^-)\right]+a_0\left[h_1^{(-1)}(0^+)-h_1^{(-1)}(0^-)\right]=1\end{aligned} \tag{2.6-17}$$

因为系统在 $t=0^-$ 时刻无储能，故有

$$h_1^{(n-1)}(0^-)=h_1^{(n-2)}(0^-)=\cdots=h_1(0^-)=h_1^{(-1)}(0^-)=0 \tag{2.6-18}$$

由此得到一组求解式（2.6-12）的初始值，即

$$\begin{cases} h_1^{(n-1)}(0^+)=1 \\ h_1^{(n-2)}(0^+)=h_1^{(n-3)}(0^+)=\cdots=h_1^{(1)}(0^+)=h_1(0^+)=0 \end{cases} \tag{2.6-19}$$

表 2-2 和表 2-3 分别列出了为求解一阶系统和二阶系统冲激响应 $h(t)$ 而引入的中间量 $h_1(t)$ 的相关数据参数。

表 2-2　一阶系统冲激响应形式对照表

阶次	一般方程	初始值	特征方程	特征根	响应形式	确定待定系数	响应
一阶	$h_1^{(1)}(t)+a_0h_1(t)=\delta(t)$	$h_1(0^+)=1$	$s+a_0=0$	$s=-a_0$	$h_1(t)=D\mathrm{e}^{st}u(t)$	$D=h_1(0^+)=1$	$h_1(t)=\mathrm{e}^{st}u(t)$

表 2-3　二阶系统冲激响应形式对照表

阶次	二阶		
一般方程	$h_1^{(2)}(t)+a_1h_1^{(1)}(t)+a_0h_1(t)=\delta(t)$		
初始值	$h_1^{(1)}(0^+)=1$　$h_1(0^+)=0$		
特征方程	$s^2+a_1s+a_0=0$		
特征根	s_1，s_2 为单实根	$s_1=s_2=s$ 为重根	$s_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{j}\beta$ 为复根
响应形式	$h_1(t)=(D_1\mathrm{e}^{s_1t}+D_2\mathrm{e}^{s_2t})\,u(t)$	$h_1(t)=(D_1+D_2t)\,\mathrm{e}^{st}u(t)$	$h_1(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}\left(D_1\cos\beta t+D_2\sin\beta t\right)u(t)$
确定待定系数	$\begin{cases}D_1+D_2=h_1(0^+)=0\\ s_1D_1+s_2D_2=h_1^{(1)}(0^+)=1\end{cases}$	$\begin{cases}D_1=h_1(0^+)=0\\ sD_1+D_2=h_1^{(1)}(0^+)=1\end{cases}$	$\begin{cases}D_1=h_1(0^+)=0\\ \alpha D_1+\beta D_2=h_1^{(1)}(0^+)=1\end{cases}$
响应	$h_1(t)=\dfrac{1}{s_1-s_2}(\mathrm{e}^{s_1t}-\mathrm{e}^{s_2t})\,u(t)$	$h_1(t)=t\,\mathrm{e}^{st}u(t)$	$h_1(t)=\dfrac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,u(t)$

例 2.6-2　求下列各式所表示系统的冲激响应。

（1）$y^{(1)}(t)+2y(t)=x(t)$

（2）$y^{(1)}(t)+2y(t)=x^{(1)}(t)+3x(t)$

（3）$y^{(2)}(t)+5y^{(1)}(t)+6y(t)=x(t)$

（4）$y^{(2)}(t)+4y^{(1)}(t)+5y(t)=2x^{(1)}(t)$

解　（1）此方程为一阶系统的基本方程，设 $h(t)$ 满足

$$h^{(1)}(t)+2h(t)=\delta(t)$$

查表 2-2，得

$$h(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

（2）由于等式右边是激励 $x(t)$ 及其导数的线性叠加，故设 $h_1(t)$，使其满足

$$h_1^{(1)}(t)+2h_1(t)=\delta(t)$$

查表 2-2 得到 $h_1(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$，应用系统线性时不变特性，得

$$\begin{aligned} h(t) &= h_1^{(1)}(t) + 3h_1(t) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2t}u(t)\right] + 3\mathrm{e}^{-2t}u(t) = \left[-2\mathrm{e}^{-2t}u(t) + \mathrm{e}^{-2t}\delta(t)\right] + 3\mathrm{e}^{-2t}u(t) \\ &= \mathrm{e}^{-2t}u(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

（3）设 $h(t)$ 满足

$$h^{(2)}(t) + 5h^{(1)}(t) + 6h(t) = \delta(t)$$

由特征方程为 $s^2 + 5s + 6 = 0$，得特征根为 $s_1 = -2$，$s_2 = -3$。查表 2-3 得

$$h(t) = \frac{1}{s_1 - s_2}\left(\mathrm{e}^{s_1 t} - \mathrm{e}^{s_2 t}\right)u(t) = \left(\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)$$

（4）由于等式右边是激励 $x(t)$ 的导数，故设冲激响应为 $h_1(t)$，并使其满足

$$h_1^{(2)}(t) + 4h_1^{(1)}(t) + 5h_1(t) = \delta(t)$$

由特征方程 $s^2 + 4s + 5 = 0$，得特征根为 $s_1 = -2 + \mathrm{j}$，$s_2 = -2 - \mathrm{j}$。查表 2-3 得

$$h_1(t) = \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\, u(t) = \mathrm{e}^{-2t}\sin t\, u(t)$$

根据 LTI 系统的微分特性，得

$$\begin{aligned} h(t) &= 2h_1^{(1)}(t) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2t}\sin t\, u(t)\right] = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2t}\sin t\right]u(t) + 2\left[\mathrm{e}^{-2t}\sin t\right]\delta(t) \\ &= 2\left[-2\mathrm{e}^{-2t}\sin t + \mathrm{e}^{-2t}\cos t\right]u(t) + 0 = 2\mathrm{e}^{-2t}\left[\cos t - 2\sin t\right]u(t) \end{aligned}$$

从以上分析可以看出，当响应 $y(t)$ 的最高阶 n 大于激励 $x(t)$ 的最高阶 m，即 $n > m$ 时，系统的冲激响应 $h(t)$ 不含冲激项；当 $n \leqslant m$ 时，系统的冲激响应 $h(t)$ 中将含冲激项或其各阶导数项。

2. 由阶跃响应求解冲激响应

以单位阶跃信号 $u(t)$ 作为激励，LTI 连续系统产生的零状态响应称为单位阶跃响应，简称阶跃响应，记为 $g(t)$。

阶跃激励与阶跃响应的关系简单地表示为

$$g(t) = T\left[u(t)\right] \qquad 或 \qquad u(t) \to g(t)$$

由冲激信号 $\delta(t)$ 与阶跃信号 $u(t)$ 的关系为 $\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)$，根据 LTI 系统的微分特性，得

$$h(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[g(t)\right] \tag{2.6-20}$$

3. 由系统的框图求系统的冲激响应

图 2.6-3 为某一阶系统的模拟框图，由系统框图写出输入与输出关系为

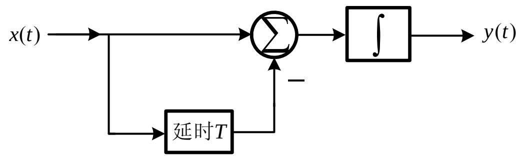


图 2.6-3　一阶系统模拟框图

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[x(\tau)-x(\tau-T)\right]\mathrm{d}\tau$$

当激励 $x(t)=\delta(t)$ 时，响应 $y(t)=h(t)$。所以此一阶系统的冲激响应为

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[\delta(\tau)-\delta(\tau-T)\right]\mathrm{d}\tau=u(t)-u(t-T)$$

2.6.3　阶跃响应

阶跃响应是一种特殊的零状态响应，其激励信号为单位阶跃信号 $u(t)$，其示意图如图 2.6-4 所示。

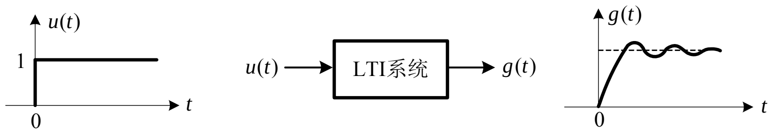


图 2.6-4　阶跃响应示意图

理论上，可以利用与冲激响应的关系求阶跃响应，即

$$g(t)=\int_{0^-}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.6-21}$$

在工程上，测试系统的阶跃响应是一个非常重要的问题。为了方便地观察响应信号，实际的激励信号并不采用某时刻以后的直流信号来模拟阶跃信号，而是采用周期方波信号的上升前沿来代替阶跃信号，在示波器上就能够很清楚地观测到响应波形了，其示意图如图 2.6-5 所示。通过对阶跃响应的分析，可以测试系统的稳定性、快速性及准确性。阶跃响应分析法是自动控制领域中不可缺少的一种分析方法。

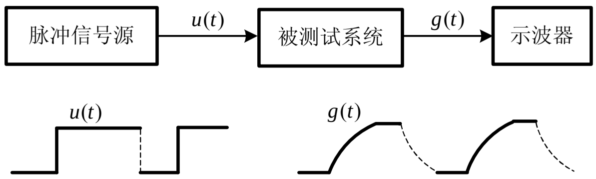


图 2.6-5　阶跃响应的测试

2.7　卷积与零状态响应

2.7.1　任意信号的分解

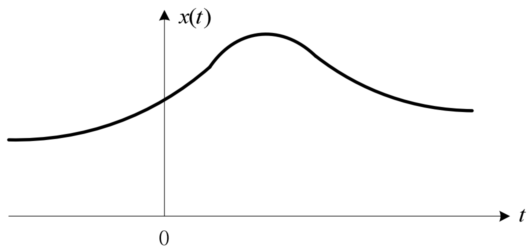
对于任意激励信号 $x(t)$，如图 2.7-1（a）所示，可以用一系列的矩形脉冲来近似，如图 2.7-1（b）所示。根据函数积分原理，当 $\Delta\tau$ 很小时，可以用矩形脉冲的顶端所构成的阶梯折线 $x_{\Delta}(t)$ 来近似表示激励信号 $x(t)$，即

$$x_{\Delta}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta\tau)\,p_{\tau}(t-k\Delta\tau) \tag{2.7-1}$$

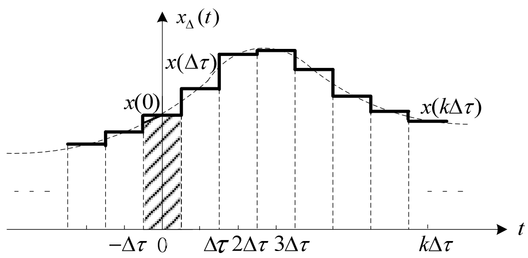
其中 $p_\tau(t)=u(t+\dfrac{\Delta\tau}{2})-u(t-\dfrac{\Delta\tau}{2})$ 为矩形脉冲，幅度为 1，脉冲宽度为 $\Delta\tau$ ，脉冲面积为 $\Delta\tau$ ，$x(k\Delta\tau)$ 为信号 $x(t)$ 在 $k\Delta\tau$ 时刻的取值。

$\Delta\tau$ 越小，阶梯折线越光滑，即阶梯折线 $x_\Delta(t)$ 就更加逼近原信号 $x(t)$ ，如图 2.7-1（c）所示。由于当 $\Delta\tau\to d\tau$ 时， $k\Delta\tau\to\tau$ ，$\sum\to\int$，则由式（2.7-1）得

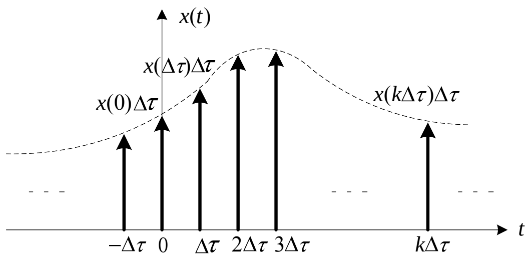
$$x(t)=\lim_{\Delta\tau\to 0}x_\Delta(t)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta\tau)\Delta\tau\,\delta(t-k\Delta\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (2.7\text{-}2)$$



（a）任意激励信号



（b）任意激励信号用矩形脉冲来近似



（c）任意激励信号用冲激信号来近似

图 2.7-1 任意信号 $x(t)$ 的分解

由此得到一个重要的结论，即任意信号都可以分解为无限多个强度为 $x(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的冲激信号及其时移的加权叠加或积分。

2.7.2 卷积与零状态响应

由式（2.7-2）可知，任意激励信号 $x(t)$ 都可以分解为冲激信号 $\delta(t)$ 及其时移的加权之和，即

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

根据冲激响应的定义及 LTI 系统的特性，$\delta(t)\to h(t)$ ，$\delta(t-\tau)\to h(t-\tau)$ ，则当激励为 $x(t)$ 时，系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (2.7\text{-}3)$$

显然，式（2.7-3）表示为一个卷积积分。表明利用激励信号 $x(t)$ 与单位冲激响应 $h(t)$ 卷积即可得到系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$，简记为

$$y_{zs}(t)=x(t)*h(t) \qquad (2.7\text{-}4)$$

如果系统是因果系统，即在 $t<0$ 时， $h(t)=0$ ，且激励信号 $x(t)$ 仅在 $t\geqslant 0$ 时有值，则零状

态响应为

$$y_{zs}(t)=\int_{0^-}^{t}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.7-5}$$

上式中积分下限为 0^- 是因为 $h(t)$ 中可能含有冲激项，$h(t)$ 中若不含冲激项，积分下限取 0 即可。在零状态条件下，为了书写方便，将零状态响应 $y_{zs}(t)$ 简单写为 $y(t)$。将激励与响应的关系表示为如图 2.7-2 所示。

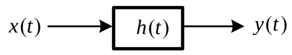


图 2.7-2　零状态条件下的系统框图

其数学表达式为

$$y(t)=x(t)*h(t) \tag{2.7-6}$$

从以上分析可以看出，求零状态响应实际上就是求卷积积分的过程，即若已知激励信号 $x(t)$ 和系统的单位冲激响应 $h(t)$，则通过求它们的卷积积分就可得到零状态响应 $y_{zs}(t)$。卷积积分简称卷积，可以通过解析法和图解法求解。

解析法就是直接由公式求卷积的方法，但在计算中存在积分定限难的问题。由于本书讨论的信号与系统一般都具有因果性，所以积分区间一般为 $(0,t)$。有关卷积积分上下限的确定可以参见卷积图解法。

为了便于计算，将常用信号的卷积列于表 2-4 中。

表 2-4　常用信号卷积表

序号	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t)*f_2(t)$
1	$\mathrm{e}^{\alpha t}u(t)$	$u(t)$	$\frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)u(t)$
2	$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
3	$u(t-t_1)$	$u(t-t_2)$	$(t-t_1-t_2)u(t-t_1-t_2)=R(t-t_1-t_2)$
4	$\mathrm{e}^{\alpha_1 t}u(t)$	$\mathrm{e}^{\alpha_2 t}u(t)$	$\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}[\mathrm{e}^{\alpha_1 t}-\mathrm{e}^{\alpha_2 t}]u(t),\ \alpha_1\neq\alpha_2$
5	$\mathrm{e}^{\alpha t}u(t)$	$\mathrm{e}^{\alpha t}u(t)$	$t\mathrm{e}^{\alpha t}u(t)$
6	$tu(t)$	$u(t)$	$\frac{1}{2}t^2u(t)$

例 2.7-1　已知激励信号 $x(t)=2\mathrm{e}^{-t}u(t)$，系统的冲激响应 $h(t)=(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$，求系统的零状态响应。

解　由式（2.7-5）可得系统的零状态响应为

$$\begin{aligned}y_{zs}(t)&=x(t)*h(t)=\int_{0^-}^{t}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{t}2\mathrm{e}^{-\tau}[2\mathrm{e}^{-(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}]\mathrm{d}\tau\\&=4\mathrm{e}^{-t}\int_{0}^{t}\mathrm{d}\tau-2\mathrm{e}^{-2t}\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau\\&=[(4t-2)\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}]u(t)\end{aligned}$$

2.7.3 卷积的图解法

卷积图解法是借助于图形计算卷积积分的一种基本计算方法。与解析法相比，图解法使人更容易理解系统零状态响应的物理意义和积分上下限的确定。从几何意义来说，卷积积分是相乘曲线下的面积。采用图解法可以使枯燥的数学符号生动活泼起来，图形的加入起到画龙点睛的奇妙效果。

卷积的一般公式

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau \tag{2.7-7}$$

由式（2.7-7）可得图解法具体步骤为：

（1）置换（$t \to \tau$），即 $f_1(t) \to f_1(\tau)$， $f_2(t) \to f_2(\tau)$。

（2）反褶（$\tau \to -\tau$），即 $f_2(\tau) \to f_2(-\tau)$。

（3）平移（$-\tau \to t-\tau$），即 $f_2(-\tau) \to f_2(t-\tau)$。

（4）相乘，即 $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$。

（5）积分，即 $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau$。

为了清楚地认识卷积的过程及积分定限的问题，以图 2.7-3 所示的两个时限信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为例来说明卷积图解过程，卷积结果以 $y(t)$ 表示。

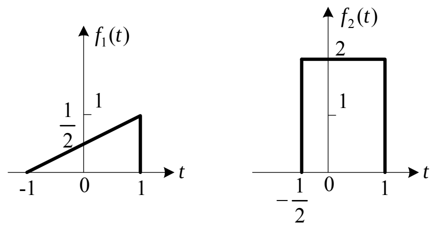


图 2.7-3　两个时限信号

由图 2.7-3 可得两个原信号的表达式，分别为

$$f_1(t) = \frac{1}{2}(t+1)[u(t+1) - u(t-1)]$$

$$f_2(t) = 2[u(t+\frac{1}{2}) - u(t-1)]$$

信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 卷积过程的“置换”、“反褶”和“平移”的步骤分别如图 2.7-4 所示。

在图 2.7-4 的“置换”步骤中，只是自变量发生改变，图形不变；“反褶”步骤中， $f_2(\tau)$ 变成 $f_2(-\tau)$，此时的 $t=0$；“平移”是参变量 t 由 $-\infty$ 到 ∞ 变化，对应的 $f_2(t-\tau)$ 沿时间 τ 轴从最左边移动到最右边。根据本题目，二信号的关系分 5 种情况，只有平移 2、平移 3 和平移 4 阶段 $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$ 才有值，从图中的阴影可以得知二信号相乘后的积分限。有关本题目的卷积计算问题说明如下：

“平移”1：此时 $t+\frac{1}{2} < -1$，即 $t < -\frac{3}{2}$，二信号无交叠，卷积结果为

$$y(t) = f_1(t) * f_2(t) = 0$$

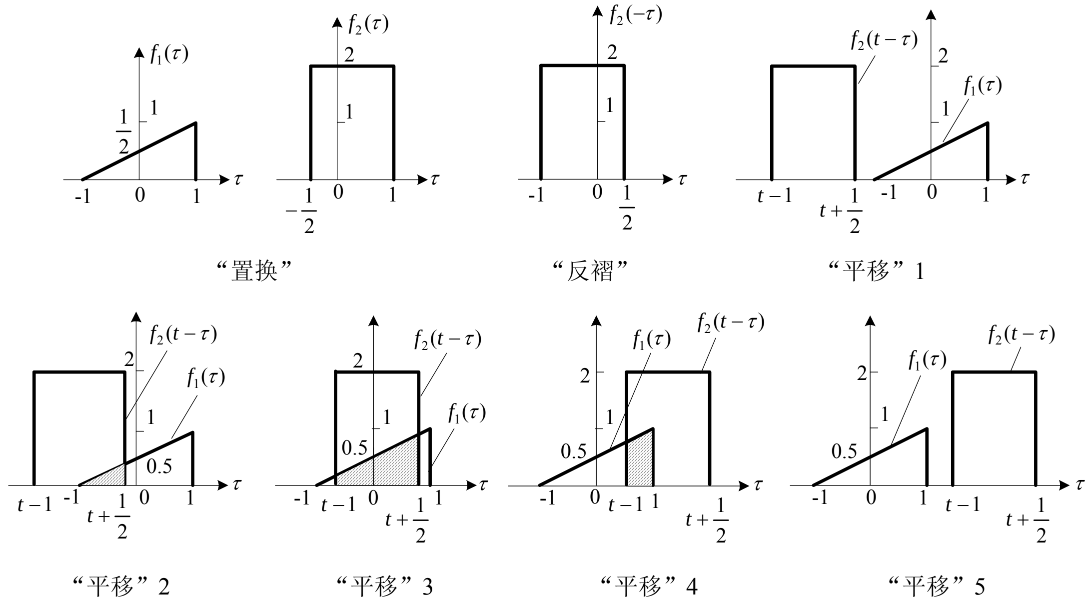


图 2.7-4　卷积图解过程示意图

“平移”2：此时 $-1\leqslant t+\frac{1}{2}<1$ 且 $t-1<-1$，即 $-\frac{3}{2}\leqslant t<0$，二信号有交叠，卷积结果为

$$y(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-1}^{t+\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(\tau+1)\times 2\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{9}{8}$$

“平移”3：此时 $-1\leqslant t+\frac{1}{2}<1$ 且 $-1\leqslant t-1<1$，即 $0\leqslant t<\frac{1}{2}$，二信号有交叠，卷积结果为

$$y(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{t-1}^{t+\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(\tau+1)\times 2\,\mathrm{d}\tau=\frac{3}{2}t+\frac{9}{8}$$

“平移”4：此时 $t+\frac{1}{2}\geqslant 1$ 且 $-1\leqslant t-1\leqslant 1$，即 $\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 2$，二信号有交叠，卷积结果为

$$y(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{t-1}^{1}\frac{1}{2}(\tau+1)\times 2\,\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{2}t^2+2$$

“平移”5：此时 $t-1>1$，即 $t>2$，二信号无交叠，卷积结果为

$$y(t)=f_1(t)*f_2(t)=0$$

根据上述分析计算可知，在不同时间范围，其卷积结果的表达式不同，分段画出对应的卷积结果的波形，如图 2.7-5 所示。

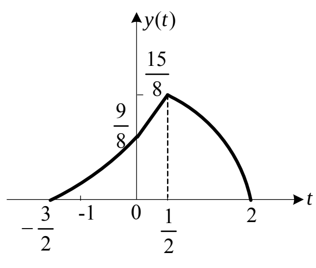


图 2.7-5　卷积结果

两个时限信号相卷积，其结果仍然为时限信号，左边界为二信号左边界之和，右边界为二信号右边界之和，其信号值域的非零值区间范围发生了变化。

2.7.4 卷积的性质

1. 交换律

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t) \tag{2.7-8}$$

式（2.7-8）表明，在求解两个连续信号的卷积时，可以将其中的任一信号反褶，卷积结果保持不变。为了运算简单，常将表达式较为简单的那一信号进行反褶。

2. 分配律

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t) \tag{2.7-9}$$

卷积的分配律反映了系统的叠加性，可以用来求若干子系统并联后，系统总的冲激响应。

图 2.7-6 中的系统由两个子系统并联而成，子系统的冲激响应分别为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 。

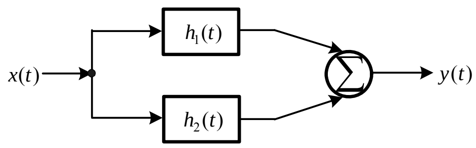


图 2.7-6 两个子系统并联

根据系统框图可知，系统的响应为

$$y(t)=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$

由卷积的分配律，可得

$$y(t)=x(t)*\left[h_1(t)+h_2(t)\right]=x(t)*h(t)$$

则系统总的冲激响应为

$$h(t)=h_1(t)+h_2(t) \tag{2.7-10}$$

3. 结合律

$$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)] \tag{2.7-11}$$

利用卷积的结合律，可以求得若干子系统串联后，系统总的冲激响应。

图 2.7-7 中的系统由两个子系统串联而成，子系统的冲激响应分别为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 。

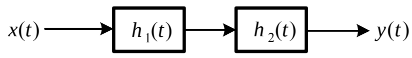


图 2.7-7 两个子系统串联

根据系统框图可知，系统的响应为

$$y(t)=\left[x(t)*h_1(t)\right]*h_2(t)$$

应用卷积结合律，可得

$$y(t)=x(t)*\left[h_1(t)*h_2(t)\right]=x(t)*h(t)$$

则系统总的冲激响应

$$h(t)=h_1(t)*h_2(t) \tag{2.7-12}$$

4. 卷积的微分与积分

若已知 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，则

$$y^{(1)}(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(1)}(t) \tag{2.7-13}$$

$$y^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t) \tag{2.7-14}$$

将卷积的微分性与积分性联合使用，可得

$$y(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2^{(1)}(t) \tag{2.7-15}$$

5. $\delta(t)$ 与任意信号的卷积

$$f(t)*\delta(t)=f(t) \tag{2.7-16}$$

$$f(t)*\delta^{(1)}(t)=f^{(1)}(t) \tag{2.7-17}$$

$$f(t)*\delta^{(-1)}(t)=f(t)*u(t)=f^{(-1)}(t) \tag{2.7-18}$$

$$f(t-T_1)*\delta(t-T_2)=f(t-T_1-T_2) \tag{2.7-19}$$

卷积的主要性质如表 2-5 所示。

表 2-5 卷积性质一览表

序号	性质名称	表达式
1	交换律	$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$
2	分配律	$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$
3	结合律	$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$
4	微分与积分	$f_1(t)*f_2(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2^{(1)}(t)$
5	$\delta(t)$ 与任意信号卷积	$f(t)*\delta(t)=f(t)$ $f(t)*\delta^{(1)}(t)=f^{(1)}(t)$ $f(t)*\delta^{(-1)}(t)=f(t)*u(t)=f^{(-1)}(t)$ $f(t-T_1)*\delta(t-T_2)=f(t-T_1-T_2)$

例 2.7-2 图 2.7-8 中各子系统的冲激响应分别为

$$h_1(t)=-\delta(t),\quad h_2(t)=\delta(t-1),\quad h_3(t)=u(t),\quad h_4(t)=3\delta(t)$$

求该系统的冲激响应 $h(t)$。

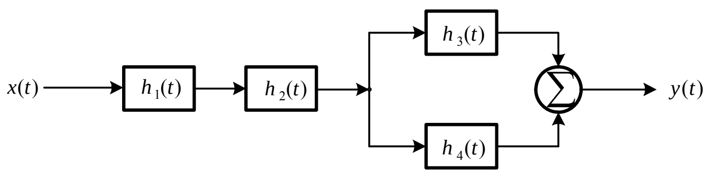


图 2.7-8 混联系统

解 由系统框图可以写出输入与输出关系：

$$\begin{aligned}y(t)&=x(t)*h_1(t)*h_2(t)*h_3(t)+x(t)*h_1(t)*h_2(t)*h_4(t)\\&=x(t)*h_1(t)*h_2(t)*[h_3(t)+h_4(t)]\\&=x(t)*\{h_1(t)*h_2(t)*[h_3(t)+h_4(t)]\}\end{aligned}$$

当激励信号 $x(t)=\delta(t)$ 时，响应 $y(t)=h(t)$，则有

$$
\begin{aligned}
h(t)&=\delta(t)*\left\{h_1(t)*h_2(t)*\left[h_3(t)+h_4(t)\right]\right\}=h_1(t)*h_2(t)*\left[h_3(t)+h_4(t)\right]\\
&=-\delta(t)*\delta(t-1)*\left[u(t)+3\delta(t)\right]\\
&=-u(t-1)-3\delta(t-1)
\end{aligned}
$$

在图 2.7-8 中，冲激响应为 $h_1(t)$ 的子系统具有倒相功能，冲激响应为 $h_2(t)$ 的子系统具有延时功能，冲激响应为 $h_3(t)$ 的子系统具有积分功能，冲激响应为 $h_4(t)$ 的子系统具有放大功能。

例 2.7-3 已知激励信号 $x(t)=2\mathrm{e}^{-t}u(t)$，系统的冲激响应 $h(t)=-5\mathrm{e}^{-3t}u(t)+3\delta(t)$，求系统的零状态响应。

解 利用表 2-4 和表 2-5，求得系统的零状态响应

$$
\begin{aligned}
y_{zs}(t)=x(t)*h(t)&=\left[2\mathrm{e}^{-t}u(t)\right]*\left[-5\mathrm{e}^{-3t}u(t)\right]+\left[2\mathrm{e}^{-t}u(t)\right]*\left[3\delta(t)\right]\\
&=-10\left[\mathrm{e}^{-t}u(t)\right]*\left[\mathrm{e}^{-3t}u(t)\right]+6\left[\mathrm{e}^{-t}u(t)\right]*\delta(t)\\
&=-10\times\frac{1}{-1+3}\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)+6\mathrm{e}^{-t}u(t)\\
&=\left(\mathrm{e}^{-t}+5\mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)
\end{aligned}
$$

例 2.7-4 已知如图 2.7-9 所示信号 $f(t)$，求 $f(t)*f(t)$ 的波形和表达式。

解 根据图 2.7-9 所示的波形，可以写出对应的表达式

$$f(t)=u(t-1)-u(t-3)$$

因此

$$
\begin{aligned}
f(t)*f(t)&=\left[u(t-1)-u(t-3)\right]*\left[u(t-1)-u(t-3)\right]\\
&=u(t-1)*u(t-1)-u(t-3)*u(t-1)-u(t-1)*u(t-3)+u(t-3)*u(t-3)\\
&=u(t-1)*u(t-1)-2u(t-1)*u(t-3)+u(t-3)*u(t-3)
\end{aligned}
$$

查表 2-4 得

$$f(t)*f(t)=R(t-2)-2R(t-4)+R(t-6)$$

其波形如图 2.7-10 所示。

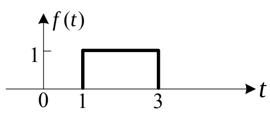


图 2.7-9 脉冲信号

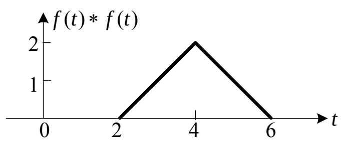


图 2.7-10 脉冲信号自卷积结果

上例还可以应用卷积微积分性质及 $\delta(t)$ 卷积特性，并借助于图形求解，如图 2.7-11 所示。

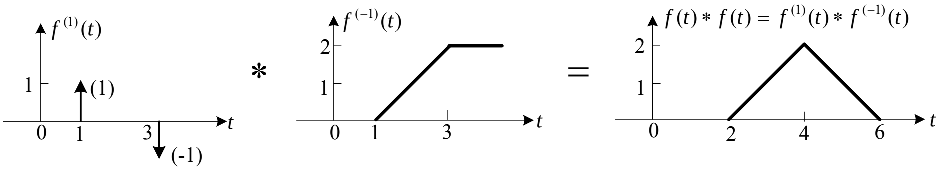


图 2.7-11 利用卷积的性质求脉冲信号自卷积

2.7.5　系统的全响应及其含义

由前面所述分析方法可知，动态系统的全响应可以分为：

1. 全响应分解为零输入响应与零状态响应

全响应可以分解为零输入响应 $y_{zi}(t)$ 与零状态响应 $y_{zs}(t)$ 之和，即

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t) \tag{2.7-20}$$

2. 全响应分解为自由响应与强迫响应

全响应 $y(t)$ 还可以分解为自由响应 $y_h(t)$ 与强迫响应 $y_p(t)$ 之和，即

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t) \tag{2.7-21}$$

自由响应又称固有响应，它反映了系统本身的特性，取决于系统的特征根；强迫响应又称强制响应，是与激励相关的响应。通过求解系统的零输入响应和零状态响应，并获得系统的全响应，然后利用系统特性与自由响应、激励与强迫响应的关系可以得到自由响应和强迫响应。

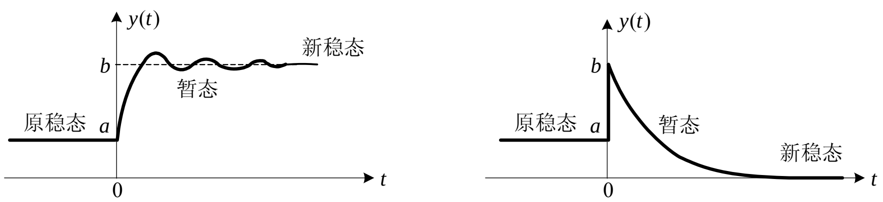
3. 全响应分解为暂态响应与稳态响应

全响应 $y(t)$ 还可以分解为暂态响应 $y_T(t)$ 与稳态响应 $y_s(t)$ 之和，即

$$y(t)=y_T(t)+y_s(t) \tag{2.7-22}$$

对于全响应，当 $t\to\infty$时，响应趋于零的那一部分响应分量称为暂态响应，又称瞬态响应；当 $t\to\infty$时，响应中能够保持恒定或周期变化的那一部分响应分量称为稳态响应。通常，当阶跃信号或周期信号作用于系统时产生的零状态响应就是稳态响应。

图 2.7-12（a）和（b）表示某一系统在 $t<0$ 时稳定输出恒定量，$t=0$ 时，系统受到不同的激励，经过一段过渡时间后重新建立平衡，达到新的稳定状态。图 2.7-12（a）中 $y(0^+)=y(0^-)$，而图 2.7-12（b）中 $y(0^+)\neq y(0^-)$。从原稳态到新稳态所经历的时间越短，说明系统的快速性越好；图 2.7-12（a）中有振荡，振荡幅度越小，则系统的平稳性越好；最终的稳态值与所希望的值越接近，则系统的准确性越好。



（a）初始值与初始状态连续变化　　（b）初始值与初始状态不连续变化

图 2.7-12　系统全响应的过渡过程示意图

例 2.7-5　已知某二阶系统的数学模型为 $y^{(2)}(t)+3y^{(1)}(t)+2y(t)=x^{(1)}(t)-x(t)$，系统的初始状态 $y(0^-)=1$，$y^{(1)}(0^-)=2$。当激励 $x(t)=u(t)$时，求系统的全响应 $y(t)$，并指出零输入响应与零状态响应、自由响应与强迫响应、暂态响应与稳态响应。

解　（1）用经典法求零输入响应 $y(t)$，即

$$y_{zi}^{(2)}(t)+3y_{zi}^{(1)}(t)+2y_{zi}(t)=0$$

由特征方程 $s^2+3s+2=0$，解得特征根为 $s_1=-1$，$s_2=-2$，则

$$y_{zi}(t)=(A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

由于系统的方程已经确定，表明系统的结构和参数也没有改变，故由系统零输入的初始值 $y_{zi}(0^+)=y(0^-)$ 及 $y_{zi}^{(1)}(0^+)=y^{(1)}(0^-)$ 确定上式的待定系数，最终得到系统的零输入响应为

$$y_{zi}(t)=(4\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

（2）为了利用卷积求零状态响应，用经典法求冲激响应 $h(t)$，即

$$h^{(2)}(t)+3h^{(1)}(t)+2h(t)=\delta^{(1)}(t)-\delta(t)$$

设 $h_1(t)$ 满足

$$h_1^{(2)}(t)+3h_1^{(1)}(t)+2h_1(t)=\delta(t)$$

则根据表 2-3 不难得出齐次微分方程的解

$$h_1(t)=(D_1\mathrm{e}^{-t}+D_2\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

根据初始值 $h_1(0^+)=0$，$h_1^{(1)}(0^+)=1$ 求待定系数，最终得到系统的冲激响应为

$$h_1(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

根据系统的线性时不变特性得

$$h(t)=h_1^{(1)}(t)-h_1(t)=(3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-t})u(t)$$

（3）利用卷积求零状态响应。由于激励与冲激响应均为因果函数，所以

$$y_{zs}(t)=x(t)*h(t)=\int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t 3\mathrm{e}^{-2\tau}\mathrm{d}\tau-\int_0^t 2\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau=\left(2\mathrm{e}^{-t}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{2}\right)u(t)$$

（4）全响应为

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\left(6\mathrm{e}^{-t}-\frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{2}\right)u(t)$$

（5）由全响应确定自由响应与强迫响应、暂态响应与稳态响应。

按照系统各响应的概念，可以由全响应分解得到下列各响应，即

自由响应：$y_h(t)=6\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}\qquad t\geqslant 0$

强迫响应：$y_p(t)=-\dfrac{1}{2}\qquad t\geqslant 0$

暂态响应：$y_T(t)=6\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}\qquad t\geqslant 0$

稳态响应：$y_S(t)=-\dfrac{1}{2}\qquad t\geqslant 0$

将全响应分解为自由响应与强迫响应或暂态响应与稳态响应，能较明显地反映系统的工作状态，便于分析系统动态过程的特点。而将全响应分为零输入响应与零状态响应，能明显地反映响应与激励在能量方面的因果关系。

2.8 连续信号与系统 Multisim 环境下的时域仿真分析

本节通过仿真实验的方法，首先实现信号基本运算与变换的仿真分析；其次是实现系统微分方程与系统基本运算单元组成的系统模拟框图，以及由 RLC 基本电路元件组成的动态电路的仿真分析；最后给出一个由 RLC 组成的二阶动态电路冲激响应与阶跃响应的仿真分析。

2.8.1　信号基本运算的仿真

1. 信号代数运算

（1）利用模拟加法器实现两个不同频率正弦信号的加减运算。

$$f(t) = 1.623\sin(200\pi t) - 0.18\sin(600\pi t) \tag{2.8-1}$$

电路图如图 2.8-1 所示，仿真结果如图 2.8-2 所示。

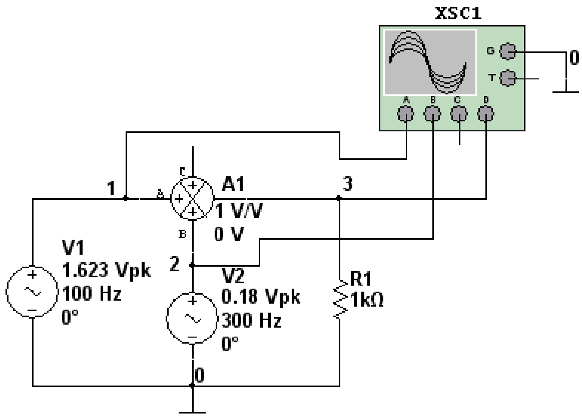


图 2.8-1　模拟加法器实现的加减运算电路

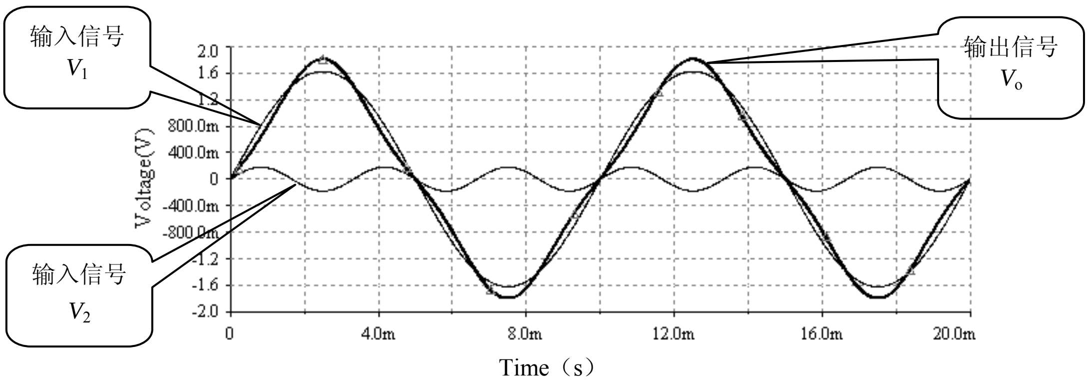


图 2.8-2　模拟加法器实现的加减运算仿真结果

（2）利用加法器电路实现两个不同频率正弦信号的加减运算

电路图如图 2.8-3 所示，仿真结果如图 2.8-4 所示。

从仿真的结果可以看出，两个正弦信号通过不同的电路模型均实现了相加减的运算，其结果基本相同。由于放大器的作用，图 2.8-4 的输出波形出现反相及一定比例的放大。

类似的方法，还可以实现更多个信号的加减运算，并能够测量出对应时刻各个信号对应数值之间的相加减运算的幅值。

（3）利用模拟乘法器实现两个不同频率正弦信号的相乘运算

$$f(t) = 0.5\sin(800\pi t)\cdot\sin(20\times10^3\pi t) \tag{2.8-2}$$

电路图如图 2.8-5 所示，仿真结果如图 2.8-6 所示。

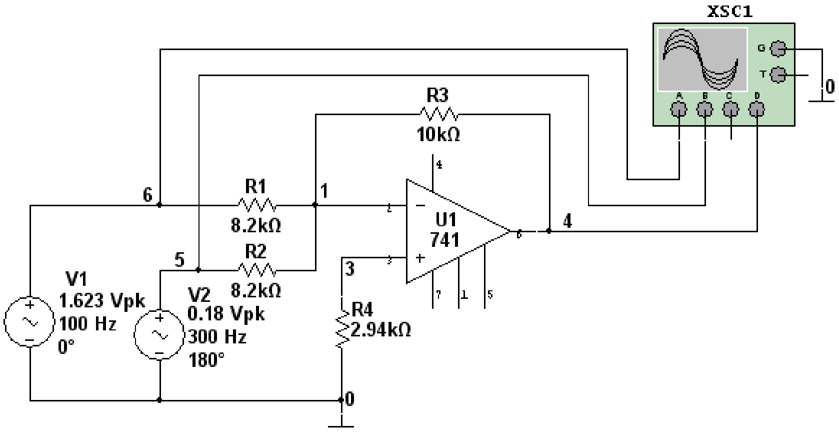


图 2.8-3　加法器电路实现的加减运算电路

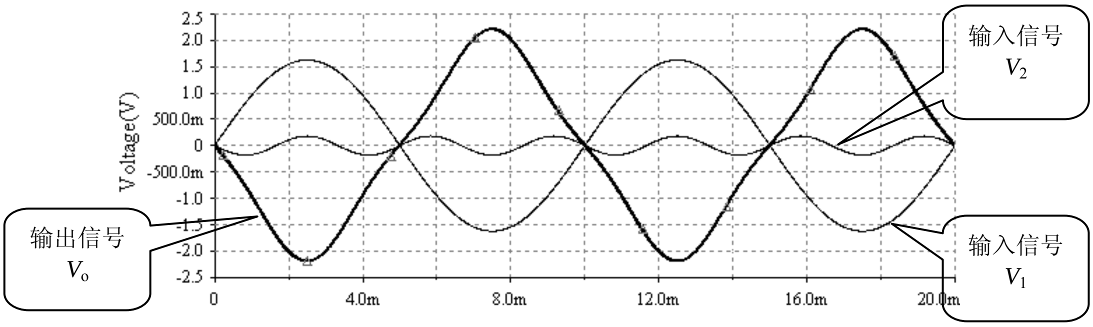


图 2.8-4　加法器电路实现的加减运算仿真结果

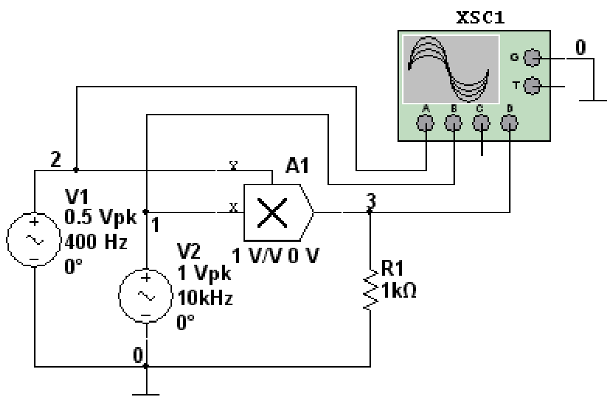


图 2.8-5　模拟乘法器实现的相乘运算电路

说明：为了能够清楚地描述输出信号等于两个输入信号对应时刻各个信号对应数值之间的相乘的对应关系，将它们在示波器的同一个屏幕上不同纵坐标位置上显示出来，便于观察理解和测量，如图 2.8-6 所示。

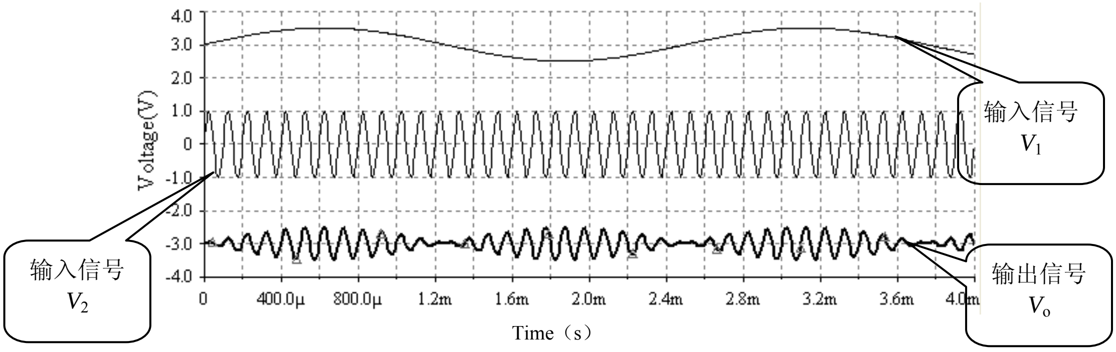


图 2.8-6　模拟乘法器实现的相乘运算仿真结果

（4）利用模拟乘法器实现周期脉冲信号与正弦信号的相乘运算

$$f(t)=0.5p_T(t)\cdot\sin(20\times10^3\pi t) \tag{2.8-3}$$

式中 $p_T(t)$ 为一个周期 $T=2.5\,\text{ms}$，脉冲宽度 $\tau=0.5\,\text{ms}$ 的周期单位脉冲信号。

电路图如图 2.8-7 所示，仿真结果如图 2.8-8 所示。

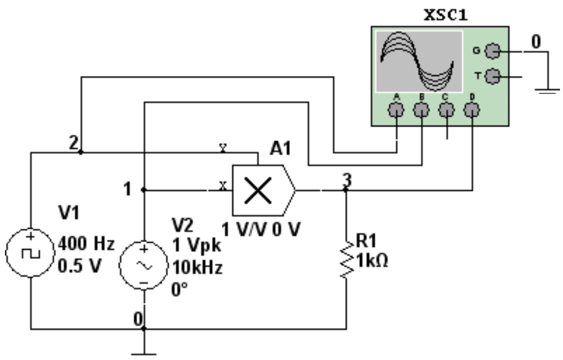


图 2.8-7　模拟乘法器实现周期脉冲信号与正弦信号的相乘运算电路

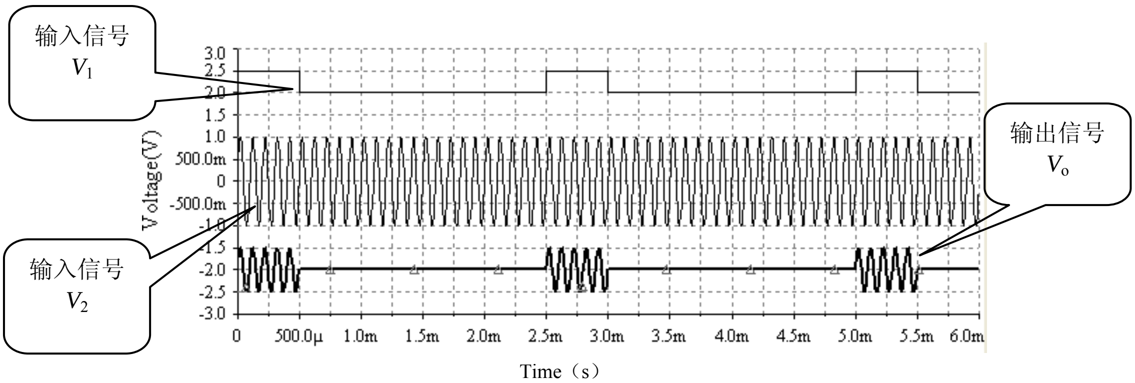


图 2.8-8　模拟乘法器实现周期脉冲信号与正弦信号的相乘运算仿真结果

两个信号的乘法运算，同样可以利用模拟电子电路来实现。由于其电路较为复杂，这里不再赘述。

2. 信号微积分运算

（1）利用无源微分电路实现对周期矩形脉冲信号的微分运算

电路图如图 2.8-9 所示，仿真结果如图 2.8-10 所示。

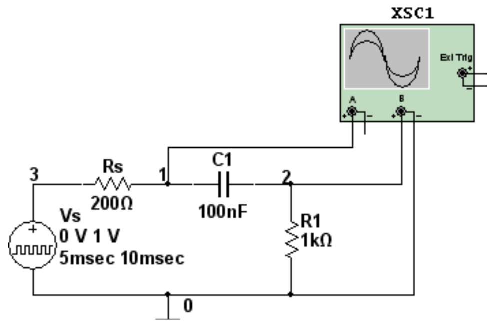


图 2.8-9　无源微分电路实现对周期矩形脉冲信号的微分运算电路

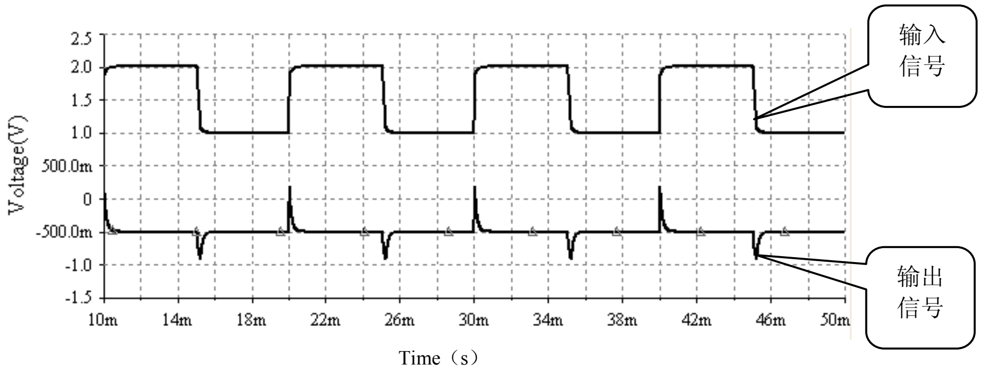


图 2.8-10　无源微分电路实现对周期矩形脉冲信号的微分运算仿真结果

图 2.8-9 中的信号源产生一个幅值为 1V，周期为 10ms，脉冲宽度为 5ms，上升沿为 0.05ms，下降沿为 0.2ms 的矩形脉冲信号。

从图 2.8-10 仿真结果中不难看出，由于矩形脉冲在其上升沿与下降沿处均出现不同快速变化，经过微分运算后，在其上升沿与下降沿处对应地产生尖脉冲。

（2）利用有源积分电路实现对周期方波信号的积分运算

电路图如图 2.8-11 所示，仿真结果如图 2.8-12 所示。

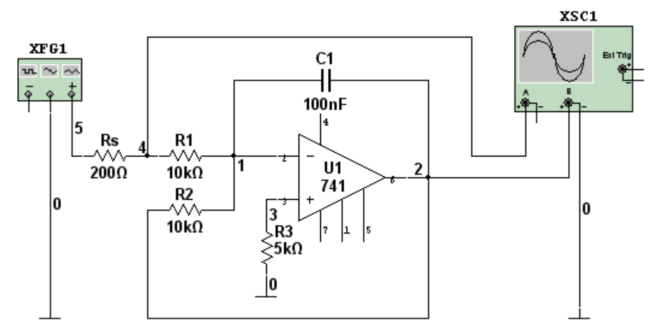


图 2.8-11　有源积分电路实现对周期方波信号的积分运算电路

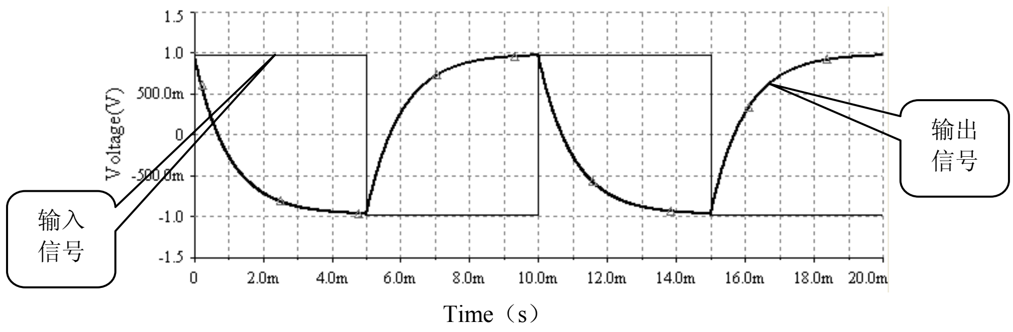


图 2.8-12　有源积分电路实现对周期方波信号的积分运算仿真结果

从图 2.8-12 仿真结果中不难看出，由信号发生器产生一个幅值为 1V，周期为 10ms 的方波信号作为激励，经过积分运算后产生一个具有上升沿和下降沿的周期指数脉冲信号。

2.8.2　系统模拟框图与电路的模拟仿真

1．一阶 RC 电路的模拟

在 2.3.2 线性时不变系统的模拟一节中，讨论了一阶 RC 电路的数学模型为一阶常系数线性微分方程，并得出其系统模拟框图，如图 2.3-4 所示。若取 $R=10\text{k}\Omega$， $C=100\text{nF}$， 则所对应的系统模拟仿真框图，如图 2.8-13 所示，仿真结果如图 2.8-14 所示。

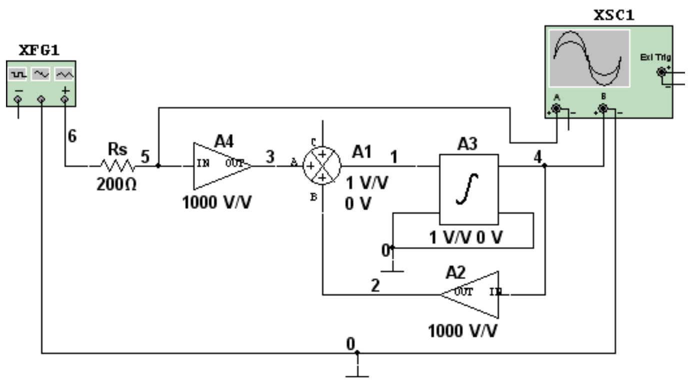


图 2.8-13　一阶 RC 电路的系统模拟框图

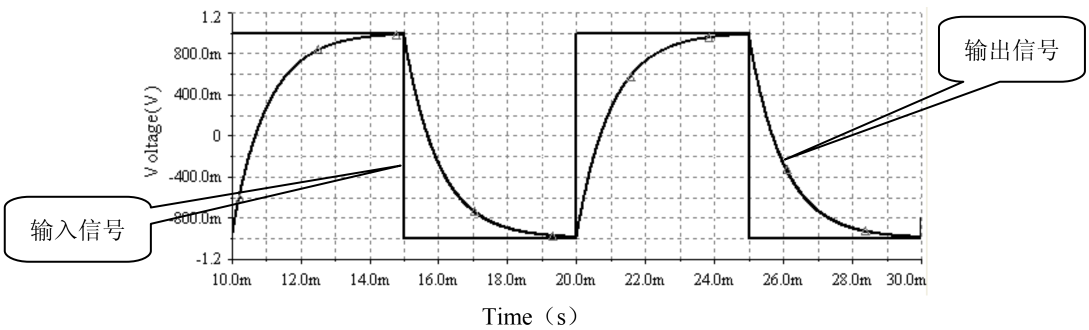


图 2.8-14　一阶 RC 电路的系统模拟框图输入与输出仿真结果

从图 2.8-14 仿真结果中不难看出，其输入、输出信号的波形与图 2.8-12 仿真结果一致，只是前者采用一阶有源反相 RC 电路，同时也说明一阶 RC 电路的系统模拟框图能够反映图 2.8-11 有源积分电路的特性。从本质上说，它们的数学模型是相同的。

2. 二阶电路的模拟

两个一阶 RC 电路级联就可以构成一个二阶电路，其数学模型为二阶常系数线性微分方程，并得出其系统模拟框图。这里依据 2.4.1 LTI 连续系统的数学模型一节中图 2.4-1 所示 RLC 电路及其数学模型式（2.4-1），给出对应的系统模拟仿真框图，取 $R=100\Omega$， $L=10\text{mH}$， $C=100\text{nF}$， 如图 2.8-15 所示，仿真结果如图 2.8-16 所示。

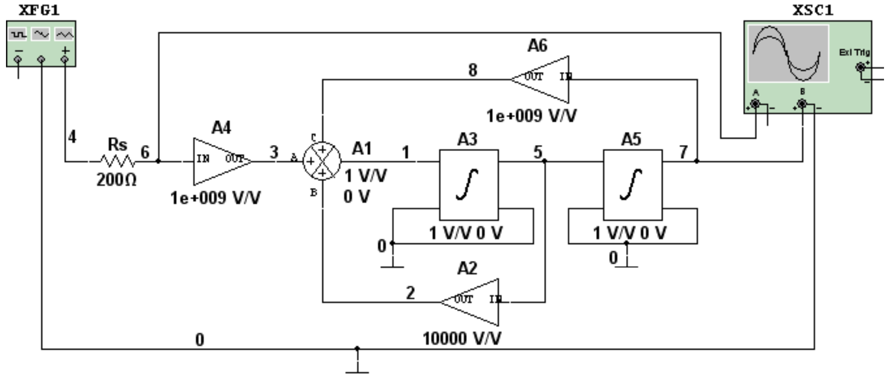


图 2.8-15　二阶 RLC 电路的系统模拟框图

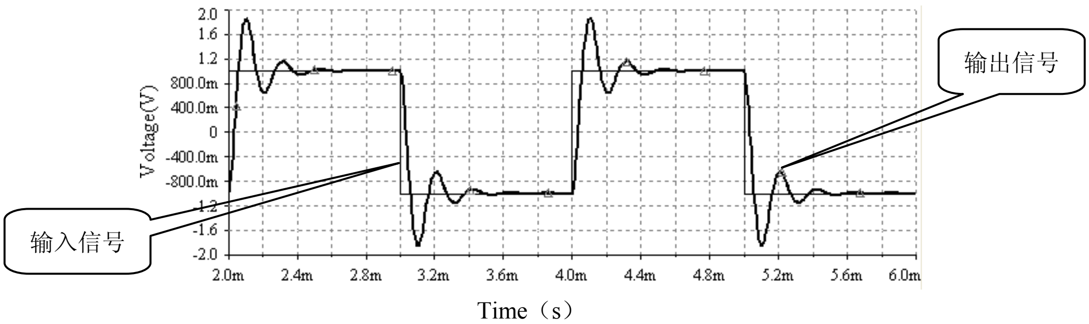


图 2.8-16　二阶 RLC 电路的系统模拟框图输入与输出仿真结果

根据上述分析方法，可以获得不同类型、不同阶次的系统模拟框图及仿真分析结果。同时还可以看出，不论什么样的系统，只要它们的数学模型相同，所得到的系统特性也是相同的。因此，系统分析的方法可以推广到其他应用领域。

2.8.3 RLC 串联电路冲激响应与阶跃响应的仿真

在二阶电路的模拟中，给出了图 2.4-1 所示 RLC 串联电路系统模拟框图的仿真分析。下面针对电路中电阻参数的变化引起冲激响应与阶跃响应的变化进行仿真分析。

RLC 串联电路中电阻参数的变化将使电路分别工作在过阻尼、临界和欠阻尼三种状态，同一种输入信号，由于电路的状态不同，其输出信号的波形也会不同。研究电路参数与其响应

的关系就显得非常重要。

1. RLC 串联电路三种工作状态的条件

（1）过阻尼状态：当电阻满足 $R > 2\sqrt{L/C}$ 时，电路的工作状态称为过阻尼状态；此时，其冲激或阶跃响应的信号波形变化比较缓慢。

（2）临界状态：当电阻满足 $R = 2\sqrt{L/C}$ 时，电路的工作状态称为临界状态；此时，其冲激或阶跃响应的信号波形变化介于过阻尼与欠阻尼状态之间。

（3）欠阻尼状态：当电阻 $R < 2\sqrt{L/C}$ 时，电路的工作状态称为欠阻尼状态；此时，其冲激或阶跃响应的信号波形变化比较快，且存在过冲，即吉布斯现象。

2. RLC 串联电路的冲激响应

仿真电路如图 2.8-17 所示，其中脉冲电压源产生一个周期为 2ms，宽度为 0.1ms 的周期脉冲电压信号。也可以利用信号发生器产生相同的周期脉冲电压信号。受电源内阻 R_s 的影响，脉冲电压信号的波形也会随着电路工作状态的变化发生改变。三种工作状态的仿真结果如图 2.8-18 所示。

3. RLC 串联电路的阶跃响应

仿真电路如图 2.8-17 所示，其中脉冲电压源产生一个周期为 2ms，宽度为 1ms 的周期方波电压信号。同样受电源内阻 R_s 的影响，方波电压信号的波形也会随着电路工作状态的变化发生改变。三种工作状态的仿真结果如图 2.8-19 所示。

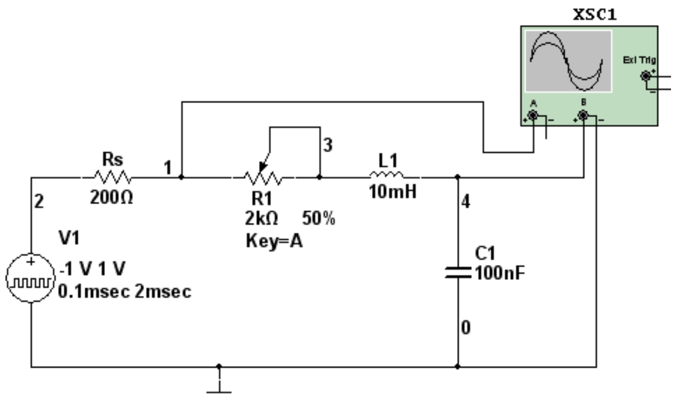
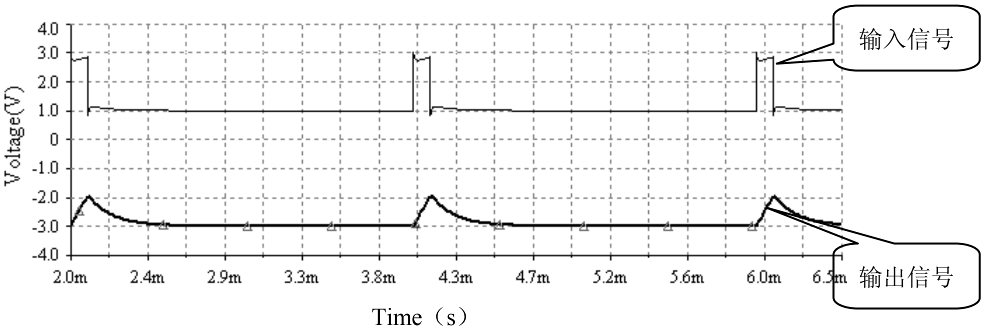
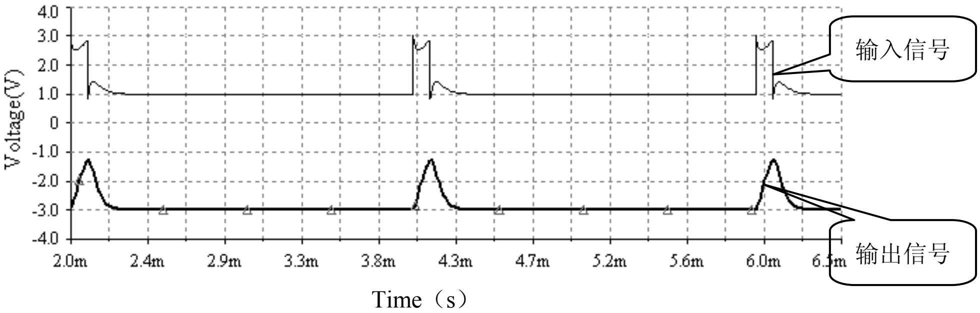


图 2.8-17　RLC 串联电路的冲激响应仿真电路

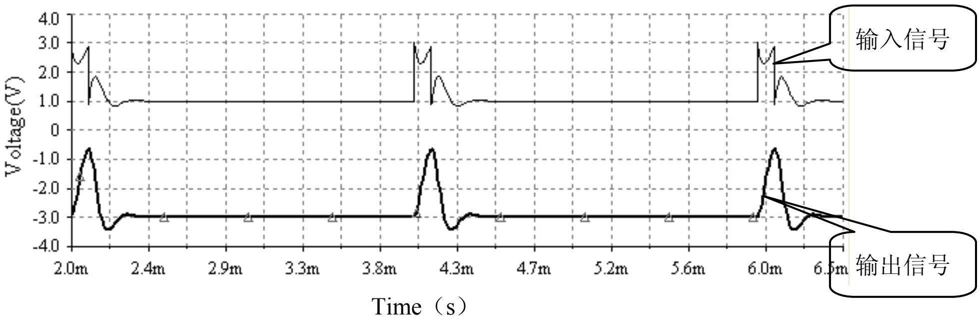


（a）电阻为 1200Ω，过阻尼状态时

图 2.8-18　RLC 串联电路三种工作状态下的冲激响应仿真结果

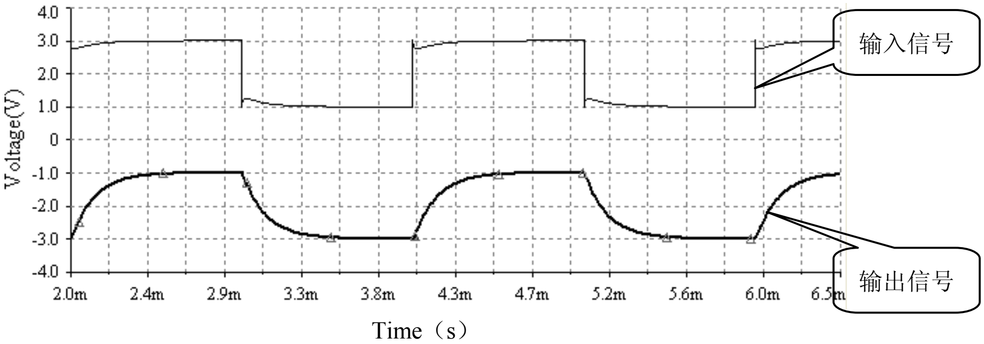


（b）电阻为 400Ω，临界状态时

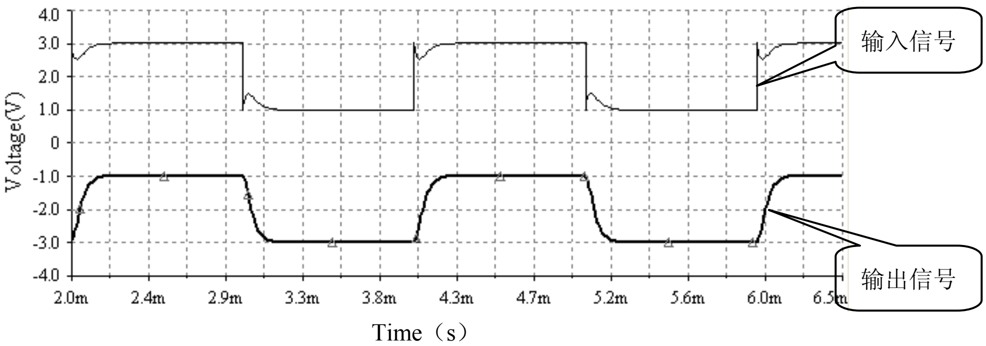


（c）电阻为 100Ω，欠阻尼状态时

图 2.8-18　RLC 串联电路三种工作状态下的冲激响应仿真结果（续图）

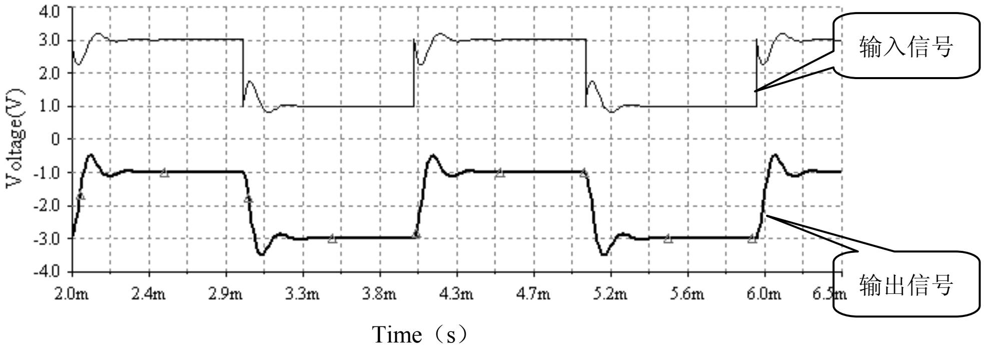


（a）电阻为 1200Ω，过阻尼状态时



（b）电阻为 400Ω，临界状态时

图 2.8-19　RLC 串联电路三种工作状态下的阶跃响应仿真结果



（c）电阻为 60Ω，欠阻尼状态时

图 2.8-19　RLC 串联电路三种工作状态下的阶跃响应仿真结果（续图）

在欠阻尼状态条件下，调节 $R_1 = 60\Omega$，测量参数为：上升时间 $t_r = 0.072\,\text{ms}$，峰值时间 $t_p = 0.11\,\text{ms}$，最大峰值 $y_{\max}(t_p) = 2.49\,\text{V}$，调节时间 $t_s = 0.24\,\text{ms}$，最大超调量 $\delta = 24.5\%$。

通过本节的仿真分析，可以直观清晰地观察到信号运算与变换后的结果；系统不同的结构或参数对响应关系的影响。

本章小结

（1）基本连续信号主要包括正弦信号、指数信号、抽样信号、奇异信号等，奇异信号中，单位冲激信号 $\delta(t)$ 和单位阶跃信号 $u(t)$ 是两个非常重要的信号，二者的关系满足 $\delta(t) = \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ 及 $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau$。$\delta(t)$ 具有抽样、筛选等特性，$u(t)$ 是一个开关信号，可以表示任意信号的起始时刻。

（2）信号既可以表示为函数表达式的形式，又可以用直观形象的波形来表示，二者相互对应，可以相互转换。信号的运算与变换包括代数运算、微分与积分、反褶、时移、尺度变换及信号的分解等。对于任意信号可分解为无限多个冲激信号的积分。

（3）LTI 连续系统是线性时不变连续系统的简称，若 $x_1(t) \to y_1(t)$ 和 $x_2(t) \to y_2(t)$，则有 $a_1x_1(t-t_1) + a_2x_2(t-t_2) \to a_1y_1(t-t_1) + a_2y_2(t-t_2)$。LTI 连续系统的数学模型为常系数线性微分方程。系统的数学模型与模拟框图相互对应，二者可以相互转化。

（4）动态系统含有储能元件，系统在某时刻的输出不仅与该时刻的激励有关，还与该时刻之前系统的储能有关。动态系统在初始储能和外加激励共同作用下产生的响应称为全响应。全响应既可以分解为零输入响应和零状态响应，又可以分解为自由响应与强迫响应，一般情况下还可以分解为暂态响应与稳态响应。零输入响应是不考虑外加激励的作用，仅由系统的初始储能所产生的响应。零状态响应是不考虑起始时刻系统储能的作用，仅由系统的外加激励所产生的响应。

（5）$\delta(t)$ 作用于零状态系统产生的响应称为单位冲激响应 $h(t)$，$u(t)$ 作用于零状态系统产生的响应称为单位阶跃响应 $g(t)$，单位冲激响应与单位阶跃响应关系为 $h(t) = \dfrac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}$ 及 $g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau$。

（6）LTI 连续系统的数学模型是微分方程，其零输入响应 $y_{zi}(t)$ 是齐次微分方程的解，并根据系统的零输入初始值确定待定系数；零状态响应 $y_{zs}(t)$ 则由卷积法获得，即 $y_{zs}(t)=x(t)*h(t)$。

（7）若干子系统有机联接组成一个大的系统。串联子系统总的单位冲激响应为各子系统冲激响应的卷积，若两个子系统串联，则有 $h(t)=h_1(t)*h_2(t)$。并联子系统总的单位冲激响应为各子系统冲激响应之和，若两个子系统并联，则有 $h(t)=h_1(t)+h_2(t)$。

（8）信号与系统的时域仿真分析有效地将 LTI 连续系统的数学模型与实际的物理（电路）模型结合起来；仿真分析结果使得理论分析更加直观、清晰，易于理解；从而进一步地促进理论与实践的结合。

习题二

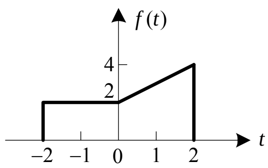
2.1　画出下列各函数的波形。

（1）$f_1(t)=(3+2e^{-t})u(t)$　　（2）$f_2(t)=e^{-|t|}$

（3）$f_3(t)=\cos\pi(t-1)u(t+1)$　　（4）$f_4(t)=(t-1)u(t)$

（5）$f_5(t)=t[u(t)-u(t-1)]$　　（6）$f_6(t)=(t-1)[u(t)-u(t-1)]$

2.2　已知信号 $f(t)$ 的波形如题图 2.1 所示，画出下列各函数的波形。



题图 2.1

（1）$f(t-1)u(t)$　　（2）$f(t-1)u(t-1)$

（3）$f(2-t)$　　（4）$f(2-t)u(2-t)$

（5）$f(1-2t)$　　（6）$f(0.5t-2)$

（7）$\dfrac{df(t)}{dt}$　　（8）$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

2.3　判断下列系统是否为线性系统、时不变系统、因果系统。

（1）$y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$　　（2）$y(t)=x(t)u(t)$

（3）$y(t)=\sin[x(t)]u(t)$　　（4）$y(t)=x(1-t)$

（5）$y(t)=x(2t)$　　（6）$y(t)=x^2(t)$

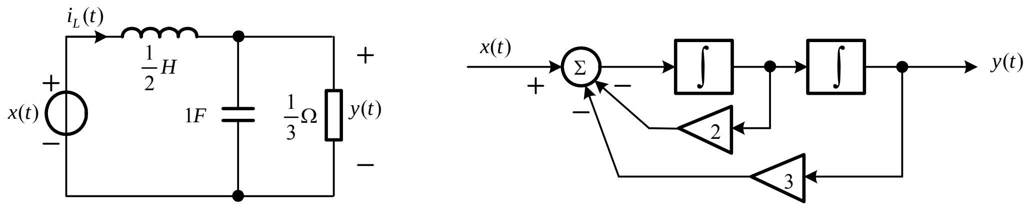
（7）$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$　　（8）$y(t)=\int_{-\infty}^{5t} x(\tau)d\tau$

2.4　如题图 2.2 所示，求所示电路和系统的数学模型。

2.5　已知描述系统的微分方程和初始状态如下，试求其 0^+ 初始值。

（1）$y^{(2)}(t)+3y^{(1)}(t)+2y(t)=x(t)$，$y(0^-)=0$，$y^{(1)}(0^-)=1$，$x(t)=u(t)$

（2）$y^{(2)}(t)+6y^{(1)}(t)+8y(t)=x^{(1)}(t)$，$y(0^-)=0$，$y^{(1)}(0^-)=1$，$x(t)=u(t)$



（a）　　　　　　　　　　　　（b）

题图 2.2

（3） $y^{(2)}(t)+4y^{(1)}(t)+3y(t)=x^{(1)}(t)+x(t)$， $y(0^-)=0$， $y^{(1)}(0^-)=1$， $x(t)=u(t)$

（4） $y^{(2)}(t)+4y^{(1)}(t)+5y(t)=x^{(1)}(t)$， $y(0^-)=1$， $y^{(1)}(0^-)=2$， $x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

2.6　已知系统响应的齐次方程及其对应的 0^+ 初始值，求系统的零输入响应。

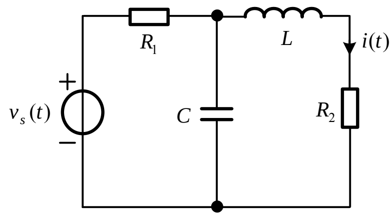
（1） $y^{(1)}(t)+3y(t)=0$， $y(0^+)=5$；

（2） $y^{(2)}(t)+4y^{(1)}(t)+3y(t)=0$， $y(0^+)=1$， $y^{(1)}(0^+)=3$；

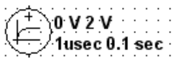
（3） $y^{(2)}(t)+2y^{(1)}(t)+y(t)=0$， $y(0^+)=1$， $y^{(1)}(0^+)=2$；

（4） $y^{(2)}(t)+2y^{(1)}(t)+2y(t)=0$， $y(0^+)=1$， $y^{(1)}(0^+)=2$；

2.7　题图 2.3 所示的电路，已知 $R_1=200\Omega$， $R_2=10\text{k}\Omega$， $L=10\text{ mH}$， $C=0.5\text{ mF}$， $v_s(t)=2\mathrm{e}^{-0.1t}u(t)\,\text{V}$，试列出 $i(t)$ 的微分方程，并利用 Multisim 观察其零状态响应的变化。



题图 2.3

注意：激励信号波形设置为

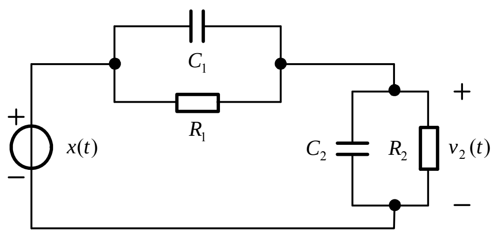
。

2.8　求下列微分方程描述系统的冲激响应 $h(t)$。

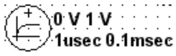
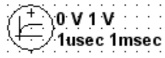
（1） $y^{(1)}(t)+2y(t)=x(t)$　　　　（2） $2y^{(2)}(t)+8y(t)=x(t)$

（3） $y^{(1)}(t)+3y(t)=2x^{(1)}(t)$　　　　（4） $y^{(2)}(t)+y^{(1)}(t)+y(t)=x^{(1)}(t)+x(t)$

2.9　题图 2.4 电路中，元件参数为 $C_1=100\text{ nF}$， $C_2=200\text{ nF}$， $R_1=1\text{k}\Omega$， $R_2=2\text{k}\Omega$，响应为电压 $v_2(t)$，利用 Multisim 观察冲激响应 $h(t)$ 与阶跃响应 $g(t)$ 并画出对应的响应波形图。



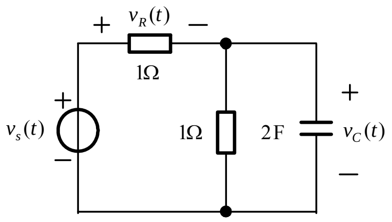
题图 2.4

注意：冲激激励信号波形设置为，阶跃激励信号波形设置为。

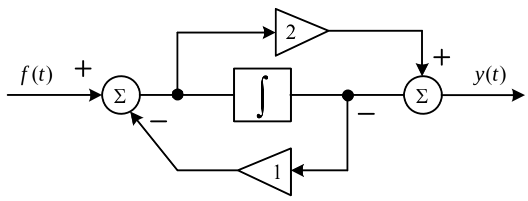
2.10 描述系统的方程为 $y^{(1)}(t)+2y(t)=x^{(1)}(t)-x(t)$，试画出系统的模拟框图并求其冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$。

2.11 题图 2.5 所示的电路，若以 $v_S(t)$ 为输入，$v_C(t)$ 为输出，试列出其微分方程，求其冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$。

2.12 题图 2.6 所示系统，利用 Multisim 观察其冲激响应 $h(t)$ 与阶跃响应 $g(t)$ 并画出对应的响应波形图（激励信号波形设置参见题 2.9）。

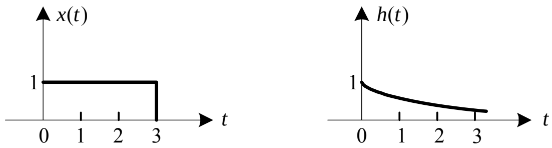


题图 2.5



题图 2.6

2.13 用图解法求题图 2.7 中信号的卷积 $x(t)*h(t)$。



题图 2.7

2.14 已知 $f(t)=u(t-2)-u(t-5)$，试求：

（1） $f(t)*f(t)$　　　（2） $f(t)*f(-t)$

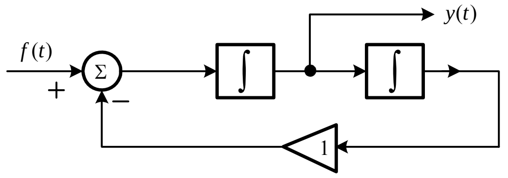
并画出两个卷积的略图。

2.15 求下列函数的卷积积分 $f_1(t)*f_2(t)$：

（1） $f_1(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$，$f_2(t)=u(t)$　　　（2） $f_1(t)=f_2(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

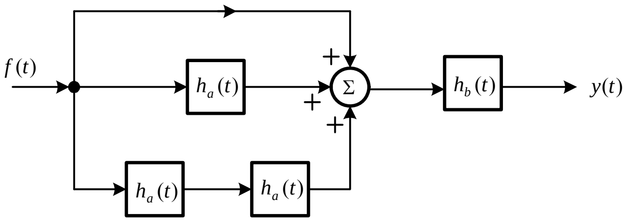
（3） $f_1(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$，$f_2(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)$　　　（4） $f_1(t)=u(t)-u(t-4)$，$f_2(t)=\sin(\pi t)u(t)$

2.16 题图 2.8 所示的系统，试求当输入 $x(t)=u(t)-u(t-4\pi)$ 时，系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$。



题图 2.8

2.17 题图 2.9 所示的系统由几个子系统组合而成，各子系统的冲激响应分别为 $h_a(t)=\delta(t-1)$，$h_b(t)=u(t)-u(t-3)$。试求复合系统的冲激响应 $h(t)$。



题图 2.9

2.18　题图 2.10 所示的系统由几个子系统组成，各子系统的冲激响应为

（1）$h_1(t)=u(t)$（积分器）

（2）$h_2(t)=\delta(t-1)$（单位时移）

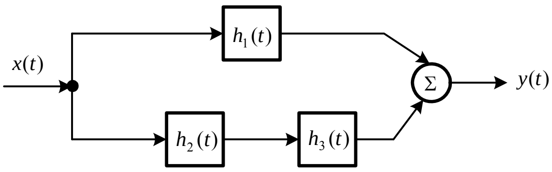
（3）$h_3(t)=-\delta(t)$（倒相器）

试求总系统的冲激响应 $h(t)$。

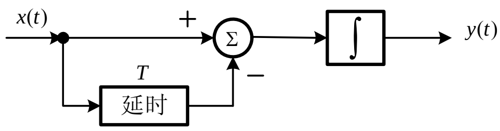
2.19　在如题图 2.11 所示的零阶保持电路中，令 $T=1$，试求当激励为

$$x(t)=\delta(t-1)+2\delta(t-2)+3\delta(t-3)+2\delta(t-4)+\delta(t-5)$$

时系统的零状态响应，并画出其波形图。



题图 2.10



题图 2.11

2.20　已知描述系统的微分方程为

$$y^{(2)}(t)+3y^{(1)}(t)+2y(t)=x(t)$$

（1）画出系统的框图。

（2）求冲激响应 $h(t)$。

（3）若激励 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，且初始状态 $y(0^-)=y^{(1)}(0^-)=0$，用卷积积分求系统的响应 $y(t)$。

2.21　给定系统微分方程 $y^{(2)}(t)+3y^{(1)}(t)+2y(t)=x^{(1)}(t)+3x(t)$，若激励信号和初始状态为以下两种情况：

（1）$x(t)=u(t)$，$y(0^-)=1$，$y^{(1)}(0^-)=2$

（2）$x(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)$，$y(0^-)=1$，$y^{(1)}(0^-)=2$

试分别求它们的完全响应，并指出零输入响应、零状态响应及自由响应、强迫响应。