第 7 章　机械振动

从广义来说，描述物质运动状态的物理量（例如物体的位移、电流、电场强度等），在某一数值附近所作的变化，都叫**振动**。**机械振动**是指物体在一定位置附近所作的来回往复的运动。例如钟摆的摆动、脉搏的搏动等。有关振动的知识在声学、机械、建筑、地震等领域的研究中是必不可少的。

机械振动有多种多样的形式，大多数情况是非常复杂的。而简谐运动是最简单、最基本的振动形式，复杂的振动可以看作是简谐运动的叠加。

7.1　简谐运动

7.1.1　简谐运动的特征

物体振动时，如果物体离开平衡位置的位移按照余弦或正弦函数的规律随时间变化，这种振动就称为**简谐运动**。例如，弹簧振子的小幅度振动以及单摆的小角度振动在不计阻力的情况下都可以看作是简谐运动。

下面以弹簧振子为例研究简谐运动的基本特征及规律。

如图 7-1 所示，将一个轻质弹簧的一端固定，另一端连接一个可以在水平光滑面上自由运动的物体 m，这样就组成了一个弹簧振子。如果所有的摩擦都可以忽略，则组成了一个无阻尼的弹簧振子。假设当弹簧既没有压缩也没有拉伸而处于自然长度时，弹簧连接的物体 m 处于位置 O。由于此时物体 m 所受的合力为零，O 点被称为物体的平衡位置。

现在以 O 为原点，取如图所示坐标轴 OX。将 m 向右移到 A 位置，然后放开，此时，因弹簧伸长而出现了指向平衡位置的弹性力。在此力的作用下，物体将加速向左运动，当物体到达位置 O 时，物体具有一定的速度，但作用在 m 上的弹性力等于零。由于惯性作用，m

将继续向左运动，这时弹簧将被压缩。由于弹簧被压缩，出现了向右的指向平衡位置的弹性力，该弹性力阻止物体向左运动，使 m 速率减小，直至物体速度变为零（此时对应的位置为 B 点）。之后，物体在弹性力作用下开始加速向右运动，到达平衡位置时，物体受力再次为零，但具有一定速度，于是物体继续向右运动，但由于受到了向左的作用力，物体速度逐渐减小，直至为零。以后，物体会反复重复上述运动。像这样，在弹性力作用下物体在某一平衡位置附近来回往复地运动，即作**机械振动**。

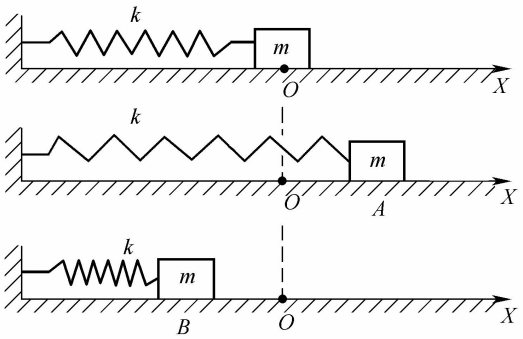


图 7-1

可以证明，如果所有的摩擦都可以忽略，物体对于平衡位置的位移 x 将按余弦或者正弦函数的规律随时间 t 变化，即做简谐运动。

7.1.2　简谐运动的运动方程

由上述分析可知，如果物体相对于平衡位置的位移为 x，则物体所受弹性力为

$$F = -kx \tag{7-1}$$

式中比例常数 k 代表弹簧的劲度系数，由弹簧的性质例如材料、形状、尺寸等决定，负号表示物体所受弹性力与物体位移方向相反。

如果所有的摩擦都可以忽略，则根据牛顿第二定律，物体的加速度为

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x \tag{7-2}$$

对于一个确定的弹簧振子，k 与 m 都是常量且都大于零，则可以令

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{7-3}$$

于是，我们有 $a = -\omega^2 x$，显然，物体的加速度与位移大小成正比，与位移方向相反。

由于 $a = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$，于是结合 $a = -\omega^2 x$，我们有 $a = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$。即

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

上式是简谐运动物体的微分方程。它是一个常系数的齐次二阶线性微分方程，解此微分方程，得

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{7-4}$$

此即为简谐运动的运动方程，简称简谐运动方程（运动学方程）。式中 A 和 φ 是积分常量，其物理意义将在后面讨论。

由上式可以知道，当物体在回复力 $F=-kx$ 作用下作振动时，其位移是时间的余弦（或正弦）函数，这就是为什么把此种振动称为简谐运动的原因。

将简谐运动方程对时间求一阶、二阶导数，可以分别得到作简谐运动物体的速度和加速度：

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

由简谐运动的运动方程、速度和加速度表达式，可以作出如图 7-2 所示的 *x-t*、*v-t* 和 *a-t* 图（$\varphi = 0$ 的情况）。由图中可以看出，物体做简谐运动时，它们的位移、速度和加速度均作周期性的变化。

7.1.3　简谐运动中的振幅、周期、频率和相位

根据简谐运动方程：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 可以看到决定物体简谐运动的特征物理量是 A、ω 和 φ，它们称为描写简谐运动的物理量。

1．振幅

在简谐运动的运动方程中，由于 $\cos(\omega t + \varphi)$ 的值在+1 和-1 之间变化，因此物体的位移就在 $-A$ 和 $+A$ 之间变化，所以运动方程中的 A 表示质点可能离开原点的最大距离，它给出了质点运动的范围在 $-A$ 和 $+A$ 之间，这个量，即简谐运动物体离开平衡位置的最大位移的绝

对值，我们叫做**振动的振幅**。由于振幅 A 是一个常量，因而简谐运动的全部变化都反映在余弦函数的变化之中。

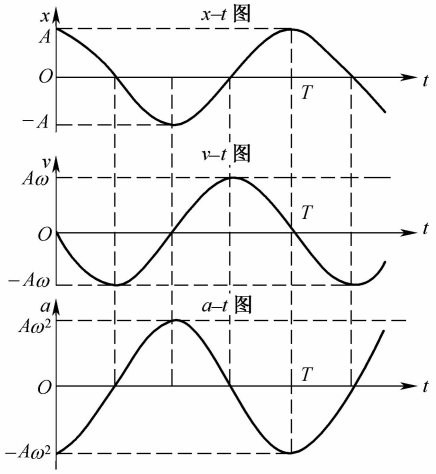


图 7-2

2. 角频率、周期、频率

简谐运动的运动方程中的 ω 叫**角频率**。

由于

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

k 与 m 都是常量且都大于零，所以角频率是振动系统固有的特征量，由系统特征量 k 与 m 确定。

余弦函数是周期函数，振动物体的运动状态完全重复一次，称为物体进行了一次全振动。物体进行一次全振动所需要的时间叫**振动的周期**，以 T 表示。从简谐运动方程我们看到周期一定满足如下公式（余弦函数周期性）

$$2\pi = \omega T$$

则有

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

而频率是周期的倒数，即单位时间内物体全振动的次数叫做**简谐运动的频率**，用 ν 表示：

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

ω、T 或 ν 都描述了简谐运动的周期性。为了方便，我们把以上

ω，T 和 ν 的关系一并记作

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \tag{7-5}$$

显然，ω，T 和 ν 这三个量中，只要有一个知道了，其余两个也就很容易得到。在国际单位制中，T 的单位是秒（s），ν 的单位是赫兹（Hz 或 s^{-1}），ω 的单位是弧度/秒（rad/s 或 s^{-1}）。

3．相位和初相

在简谐运动中，无论是关于位移的方程还是速度或加速度的方程中，都含有变量$(\omega t+\varphi)$，我们称之为**振动的相位（或位相）**。

相位是描述简谐运动状态的物理量。相位是一个非常重要的概念，由简谐运动物体的运动方程可知，当振幅和角频率一定时，振动物体在任一时刻相对于平衡位置的位移、速度和加速度等运动特性都取决于相位。t=0 时的相位 φ 叫**初相**，初相描述简谐运动的初始状态。

相位还常常用于讨论两个不同振动的同步问题。例如，有下列两个简谐运动：

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$
$$x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

它们的相位差（简称相差）为

$$\Delta\Phi = (\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1) = \varphi_2-\varphi_1 = \Delta\varphi$$

相差可以描述同一时刻两个不同振动的状态差异。从上面的式子可以看出，两个同频率的简谐运动在任意时刻的相差等于其初相差，而与时间无关。由这个相差的值就可以分析它们的步调是否一致。

如果 $\Delta\Phi = 0$（或者 2π 的整数倍），两振动质点将同时到达各自的极大值，并且同时越过原点并同时到达极小值，它们的步调始终相同。这种情况我们说二者同相。

如果 $\Delta\Phi = \pi$（或者 π 的奇数倍），两振动质点中的一个到达极大值时，另一个将同时到达极小值，并且将同时越过原点并同时到达各自的另一个极值，它们的步调正好相反。这种情况我们说二者反相。

当 $\Delta\Phi$ 为其他值时，我们一般说二者不同相。

7.1.4　常数 A 和 φ 的确定

由 t=0 时振动物体的速度和加速度（称为初始条件），根据简谐运动方程和其速度方程，我们有

$$x_0 = A\cos(\varphi)$$

$$v_0 = -A\omega\sin(\varphi)$$

联立以上两个方程，则

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \tag{7-6}$$

$$\tan\varphi = \frac{-v_0}{\omega x_0} \tag{7-7}$$

由以上的讨论可知，对给定振动系统，周期由系统本身性质决定（不同系统决定的因素不一样，对于弹簧振子，由 k 和 m 决定），而振幅和初相由物体的初始速度和初始位移决定。

7.2　旋转矢量

在上一节，我们用谐振方程和谐振曲线来描述了简谐运动，除此以外，还有一种很直观、很方便的描述方法，称为**旋转矢量法**。

如图 7-3，在某一平面上作一个以 O 为原点的坐标轴 OX，以原点 O 为起点作一个长度等于简谐运动振幅 A 的矢量 $\boldsymbol{A}$，令 $\boldsymbol{A}$ 绕原点 O 以等于简谐运动圆频率的匀角速度 ω 沿着逆时针方向匀速旋转，我们称 $\boldsymbol{A}$ 为旋转矢量，此旋转矢量的端点将在平面上画出一个圆，称为参考圆。现设 t=0 时矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角为 φ，则任意 t 时 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角为 $(\omega t + \varphi)$，那么矢量的端点在 x 轴上投影点的坐标为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

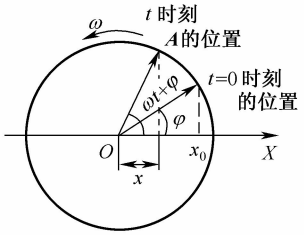


图 7-3

我们看到，上式与简谐运动方程式完全相同，所以旋转矢量的端点在 x 轴上的投影的运动实质上就是简谐运动。很明显，一个旋转矢量是与一个简谐运动相对应的，其对应关系是：旋转矢量的长度对应简谐运动的振幅，因而我们把旋转矢量又称为振幅矢量；矢量的角位

置对应简谐运动的相位，矢量的初角位置对应振动的初相位，矢量的角位移则对应振动相位的变化；矢量旋转的角速度与振动的角频率相对应，亦即相位变化的速率；矢量旋转的周期和频率对应振动的周期和频率。

由以上分析可以看到，在我们在研究简谐运动的运动特性时，用以上方法作一个旋转矢量进行分析，可以使简谐运动在运动过程中的各个物理量更为直观地表现出来，运动过程更为清晰。

例 7.1　如图 7-4 所示，一个轻质弹簧的左端固定，右端连着一物体组合成弹簧振子，弹簧的劲度系数 $k=0.72\mathrm{N\cdot m^{-1}}$，物体的质量 $m=20\mathrm{g}$。

（1）把物体从平衡位置向右拉到 $x=0.05\mathrm{m}$ 处停下后再释放，求简谐运动方程；

（2）求物体从初始位置运动到第一次经过 $\frac{A}{2}$ 处时的速度。

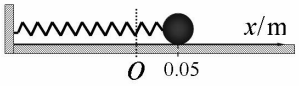


图 7-4

解　（1）弹簧振子的圆频率和振幅分别为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{0.72\mathrm{N\cdot m^{-1}}}{0.02\mathrm{kg}}}=6.0\mathrm{s^{-1}},\quad A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=x_0=0.05\mathrm{m}$$

设初相位为 φ，则

$$\tan\varphi=\frac{-v_0}{\omega x_0}=0,\quad \varphi=0 \text{ 或 } \pi$$

由图 7-5 的初始位置对应的旋转矢量图可知，$\varphi=0$。

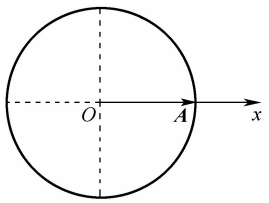


图 7-5

则弹簧振子的简谐运动方程为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=(0.05\mathrm{m})\cos[(6.0\mathrm{s^{-1}})t]$$

（2）由弹簧振子的简谐运动方程，得

$$\cos(\omega t)=\frac{x}{A}=\frac{1}{2},\quad \omega t=\frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{5\pi}{3}$$

由图 7-6 中第一次经过 $\frac{A}{2}$ 处对应的旋转矢量图，可得 $\omega t=\frac{\pi}{3}$，于是，得

$$v=-A\omega\sin\omega t=-0.26\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$（负号表示速度沿 x 轴负方向）

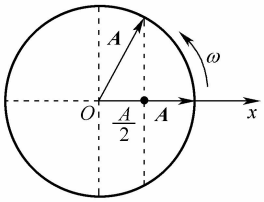


图 7-6

7.3　微振动的简谐近似

弹簧振子是由于受到了 $F=-kx$ 的弹性力才会作简谐运动，在物体的机械运动过程中，无论物体所受作用力是否为弹性力，只要所受作用力满足类似于 $F=-kx$ 那样的规律，它的运动必为简谐运动，人们把这种与弹簧的弹性力相类似的作用力称为准弹性力。以下为两种准弹性力作用下简谐运动的例子。

7.3.1　单摆

如图 7-7 所示，一根没有伸缩的不考虑质量的细绳，上端固定，下端悬挂一个尺寸很小的质量为 m 的重物，把此重物稍加移动后，在重力作用下，重物就可以在竖直平面内来回摆动，这种装置称为**单摆**。

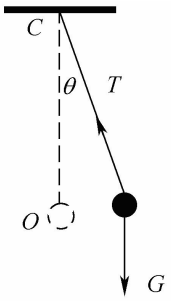


图 7-7

受力分析可知，重物受到重力和绳子拉力作用。设绳长为 l，则重物重力对 C 点的力矩为

$$M=-mgl\sin\theta$$

当绳子的摆角不是很大时（一般 $\theta<5^\circ$），$\sin\theta\approx\theta$，则有

$$M=-mgl\theta$$

那么，根据转动定律 $M=J\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=ml^2\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$，有

$$ml^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-mgl\theta$$

令 $\omega^2=g/l$，则上式变为

$$\frac{\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0$$

不难得到此微分方程的解

$$\theta=\theta_m\cos(\omega t+\varphi)$$

显然，在形式上，此式与弹簧振子满足的微分方程是一样的，只不过由弹簧振子的位移换成了单摆的角位移。由此我们得出结论：单摆的小角度摆动振动也是简谐运动。

单摆振动的角频率和周期分别为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{7-8}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7-9}$$

7.3.2　复摆

一个可绕不过质心的水平固定轴转动的刚体称为**复摆**，也称**物理摆**。平衡状态下，摆的重心在轴的正下方，摆动时，重心与轴的连线偏离平衡时的竖直位置，如图 7-8 所示。

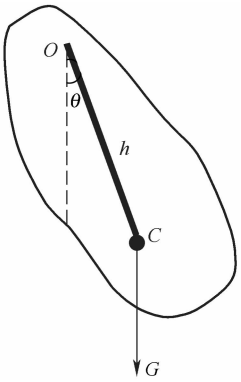


图 7-8

设重心 C 到转轴 O 的距离为 h，刚体的转动惯量为 J，则重力 $\boldsymbol{G}$ 的力矩为

$$M = -mgh\sin\theta$$

由转动定律，有

$$-mgh\sin\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

当绳子的摆角不是很大时（一般 $\theta < 5°$），$\sin\theta \approx \theta$，则为

$$-mgh\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

设

$$\omega^2 = \frac{mgh}{J}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}\theta^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\theta = 0$$

由此得到结论：复摆的小角度摆动振动是简谐运动。

容易证明：复摆的振动周期和频率分别为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgh}{J}}$$

7.4　简谐运动的能量

下面我们以弹簧振子为例来讨论简谐运动的能量特征。实际上，

任何一个简谐运动的物体，由于它们受到的合外力均要满足 $F=-kx$，都相当于一个弹簧振子。不同的是，它们的 k 值可能不是弹簧的倔强系数，而是其他的由系统的性质决定的常数而已，所以其他诸如单摆或复摆等情况可以依次类推。

简谐运动系统的能量=系统的动能 E_k+系统的势能 E_p。

利用弹簧振子的简谐运动方程及其速度方程，可以得到任意时刻一个弹簧振子的弹性势能和动能。

某一时刻，谐振子速度为 v，位移为 x。

由简谐运动方程　　$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

得到势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$
$$= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

由速度

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

得到动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$
$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) \quad (\because \omega^2 = \frac{k}{m})$$

显然，简谐运动的动能和势能是时间的周期性函数。

则弹簧振子总机械能为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 \qquad (7\text{-}10)$$

可见弹簧振子的总机械能是不随时间改变的，即其机械能守恒。这是由于无阻力自由振动的弹簧振子是一个孤立系统，在振动过程中没有任何外力对它做功的缘故。上面的结果还表明弹簧振子的总能量和振幅的平方成正比，这一点对其他的简谐运动系统也是正确的。这意味着振幅不仅描述简谐运动的运动范围，而且反映振动系统能量的大小。

7.5　简谐运动的合成

7.5.1　两个同方向同频率简谐运动的合成

运动可以合成，而振动是运动的一种形式，因此两种或者两种以上的振动也是可以合成的，振动合成的依据是运动的叠加原理。在实际问题中，我们经常遇到振动的合成问题。例如，当两列声波同时传到空间某一点时，该处质点将同时参与两种运动，则该质点总的运动就是两个振动的合成。由于一般情况下质点参与的不同振动特性差异很大，所以振动合成问题非常复杂，下面我们只讨论情况较为简单的几个例子，例如，讨论振动方向和振动频率都相同的两个简谐运动的合成问题等，这在后面讨论波的干涉时十分重要。

设两个振动都发生在 x 方向，振动的频率均为 ω，振动方程分别为

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_{20})$$

式中 A_1、A_2 和 φ_{10}、φ_{20} 分别为两个振动的振幅和初相。按运动的叠加原理，在任意时刻合振动的位移为

$$x = x_1 + x_2$$

根据三角函数公式可以求得结果

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中，

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$，其中 $\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10}$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20}}$$

显然，合振动是简谐运动，其频率仍为 ω。

但是利用三角函数公式计算过程较为繁杂，如果根据振动的矢量图来分析，可以更直观、更简捷地得出结论。

如图 7-9 所示，$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 分别表示简谐运动 x_1 和 x_2 的旋转矢量，如前所述，它们在 x 轴上投影的坐标即表示简谐运动 x_1 和 x_2，我们要求它们的和 $x_1 + x_2$。作 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 的合矢量 $\boldsymbol{A}$，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的端点在 x 轴上

投影的坐标是 $x = x_1 + x_2$，这正好是我们要求的合振动的位移。

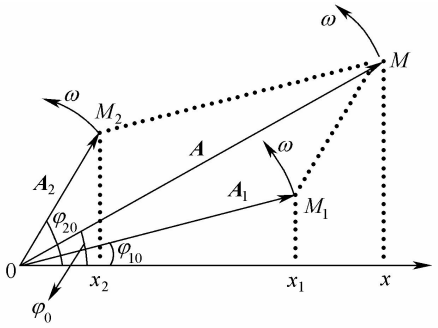


图 7-9

为了求矢量 $\boldsymbol{A}$ 的端点在 x 轴上投影的坐标，我们首先分析 $\boldsymbol{A}$ 的变化规律。由于两个振动的角频率相同，即 $\boldsymbol{A_1}$，$\boldsymbol{A_2}$ 以相同的角速度 ω 匀速旋转，所以在旋转过程中图中平行四边形的形状保持不变，因而合矢量 $\boldsymbol{A}$ 的长度 A 保持不变，并以同一角速度 ω 匀速旋转。因此我们断定，合矢量 $\boldsymbol{A}$ 也是一个旋转矢量。矢量 $\boldsymbol{A}$ 的端点在 x 轴上的投影坐标可表示为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

即合振动也是简谐运动。合振动的振幅 A 等于合矢量 $\boldsymbol{A}$ 的长度，合振动的初相 φ_0 就是合矢量的初角位置。在图 7-9 中用余弦定理可求得合振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$$

由直角 Δ OMx 可以求得合振动的初相 φ 满足

$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20}}$$

分析：就 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$ 而言，如果两个分振动同相，即

$$\text{若 } \varphi_{20} - \varphi_{10} = \pm 2k\pi \quad k = 0,1,2,\cdots$$

则 $A = A_1 + A_2$，这时合振幅达到最大。此时称两个振动相互加强。

如果两个分振动反相，即

$$\text{若 } \varphi_{20} - \varphi_{10} = \pm(2k+1)\pi \quad k = 0,1,2,\cdots$$

则 $A = |A_1 - A_2|$，两个分振动相互减弱。

进一步，如果 A_1=A_2，则 A=0，两个分振动完全抵消。

7.5.2　同方向不同频率简谐运动的合成

设有两个分振动

$$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi)$$

注意这两个分振动的振幅相同、初相位相同但频率不同。

则它们的合振动可由三角函数运算，利用 $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，可以求得

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi\right) \end{aligned}$$

该合振动的图像如图 7-10 所示。

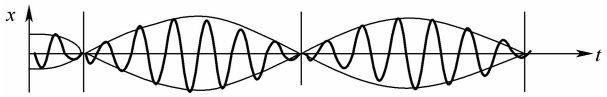


图 7-10

显然，该合振动不是简谐运动。

当 ω_2 与 ω_1 在数值上较为接近时，$\omega_2 - \omega_1 << \omega_2 + \omega_1$，则合振动可以近似为

$$x = A(t)\cos\bar{\omega}t$$

其中

$A(t) = 2A\cos\left(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)$，随 t 缓慢变化，

$\cos\bar{\omega}t = \cos\left(\dfrac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)$，随 t 快速变化。

这样，合振动可看作振幅缓变的简谐运动。

当两个振动频率接近时，合成中由于周期的微小差别而造成合振幅随时间作周期性变化，振动时而加强时而减弱的现象称为拍。

合振动在单位时间内加强（或减弱）的次数称为拍频，由此定义可以推得其数值为 $\nu = |\nu_2 - \nu_1|$。

利用拍现象还可以测定振动频率、校正乐器和制造差拍振荡器等。

7.6　阻尼振动　受迫振动　共振

7.6.1　阻尼振动

简谐运动是忽略阻力的振动，是理想的运动形式。实际振动都存在阻尼力，振动系统的能量都随时间而减小，我们把存在阻尼力作用的振动称为**阻尼振动或减幅振动**。

阻尼一般分为如下两类：

摩擦阻尼：系统克服阻力做功使振幅受到摩擦力的作用，系统的动能转化为热能。

辐射阻尼：振动以波的形式向外传波，使振动能量向周围辐射出去。

通常阻尼力的形式为：$F_r = -Cv$

其中，C 称为阻力系数，v 是振动物体的运动速度。

根据牛顿第二定律有：$-kx - Cv = ma$

$$\text{或}\quad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

对一给定的振动系统，m、k、C 均为常量。

若令：$k/m = \omega_0^2$，$C/m = 2\delta$，我们把 δ 称作阻尼系数，则上式写成：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2x = 0$$

根据 δ 不同，上式可解出三种可能的运动状态。

（1）弱阻尼状态：当 $\delta < \omega_0$ 时

$$x = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

式中

$$\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2}$$

所以

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\Big/\sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2}$$

显然，阻尼振动的周期大于同样系统的简谐运动的周期。

如图 7-11 所示是弱阻尼状态下振动位移与时间的关系，显然，

质点作运动范围不断缩小的往复运动。

（2）过阻尼状态：当 $\delta \geqslant \omega_0$ 时

$$x = c_1 \mathrm{e}^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} + c_2 \mathrm{e}^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}$$

此时，将物体移开平衡位置而后释放，系统不作往复运动，而是非常缓慢地回到平衡位置，这种状态称为过阻尼状态，振动位移与时间的关系如图 7-12 所示。

（3）临界阻尼状态：若 $\delta = \omega_0$，将物体移开平衡位置后，系统不作往复运动，而是较快地回到平衡位置并停下来，这种状态叫**临界阻尼状态**，如图 7-13 所示。此时，

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-\beta t}$$

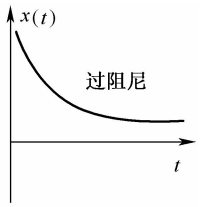


图 7-12

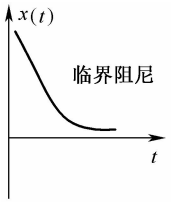


图 7-13

7.6.2　受迫振动

在没有能量供给时，阻尼振动由于能量逐渐减少，所以振动最终将会停止。但如果在欠阻尼振动系统上外加一个周期性外力，则所发生的振动将会有所不同，这时振动并不会因存在阻尼而停止，而是持续振动下去。振动系统在连续的周期性外力作用下进行的振动称为**受迫振动**。例如机器运转时引起底座的振动，收音机喇叭纸盆的振动等。这种周期性外力称为策动力。

1．受迫振动方程及其解

受迫振动的系统受力分析如下：回复力 $-kx$；阻尼力 $-Cv$；策动力 $F\cos\omega_p t$（为简便起见，我们假设策动力是随时间按余弦规律变化的），则根据牛顿第二定律，可得出弹簧振子的动力学方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F\cos\omega_p t$$

令：$\dfrac{k}{m} = \omega_0{}^2$，$\dfrac{C}{m} = 2\delta$，$\dfrac{F}{m} = f$

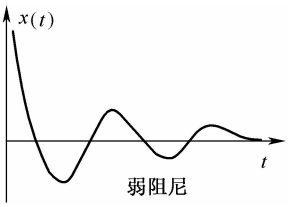


图 7-11

可得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=F\cos\omega_p t$$

解此微分方程，得到受迫振动的运动方程为

$$x=A_0\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)+A\cos(\omega_p t+\psi)$$

其中，$A=\dfrac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_p^2)+4\delta^2\omega_p^2}}$，$\tan\psi=\dfrac{-2\delta\omega_p}{\omega_0^2-\omega_p^2}$

上式表明，在受迫振动的初期，振动是非常复杂的。受迫振动可以看成是由两个振动合成的。第一项为阻尼振动，随时间推移而趋于消失，它反映受迫振动的暂态行为，与策动力无关；第二项表示与策动力频率相同且振幅为 A 的周期振动。经过一段时间后（理论上 $t\to\infty$ ）阻尼振动可忽略不计，质点进行由上式第二项所决定的与策动力同频率的振动，即达到稳定的振动状态：$x=A\cos(\omega_p t+\psi)$ 。

2. 受迫振动的特点

由以上分析，我们可以看到受迫振动具有以下特点：

（1）稳定后，由于阻尼振动可忽略不计，所以受迫振动的圆频率等于强迫力的圆频率。

（2）因为稳定时振幅恒定，所以从能量的观点来看，稳定时一周期内强迫力所作的功等于阻尼力的功，因此系统振动能量保持不变。

（3）由于在实际生活中，阻尼无处不在，但我们可以使用外来的策动力来抵消阻尼，所以受迫振动是实际实现简谐运动的方法。

7.6.3　共振

当策动力的角频率取某一定值时，受迫振动的振幅获得极大值，这一现象叫做**共振**。

由受迫振动的振幅表达式

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_p^2)+4\delta^2\omega_p^2}}$$

可见，振幅是策动力的函数，因此存在极值的问题,与此对应的极值现象，称为位移共振。共振时的角频率叫共振角频率，以 ω_r 表示。根据高等数学知识，为解振幅 A 的极值问题，可对其求解导数且令其为零

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega_p}=0$$

由此可得，当$(\omega_0^2-2\delta^2-\omega_p^2)=0$时，振幅$A$有最大值。这时驱动力的角频率等于共振角频率，即

$$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$$

因此，系统的共振频率是由固有频率和阻尼系数决定的，将上式代入式$A=\dfrac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_p^2)+4\delta^2\omega_p^2}}$，可得共振时的振幅

$$A_r=\frac{f}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$$

可知，阻尼系数越小，共振角频率越接近于系统的固有角频率，同时振幅A_r也就越大。

习题 7

7-1　作简谐振动的小球，速度的最大值为$v_m=3.0\mathrm{cm/s}$，振幅为$A=2.0\mathrm{cm}$；若令速度具有最大值的某时刻为$t=0$，求：（1）振动周期；（2）加速度的最大值；（3）振动的表达式。

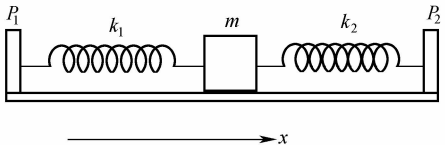
7-2　一质量为 0.20kg 的质点作简谐振动，其振动方程为$x=0.60\cos(5t-\pi/2)$，其中x以 m 为单位，t以 s 为单位．求：（1）质点的初速度；（2）质点在正向位移一半处所受的力．

7-3　两弹簧劲度系数分别为k_1=1N/m，k_2=3N/m。在光滑的水平面上将此二弹簧分别连接到质量为m=0.1kg 的物体的两端，弹簧的其余两端分别固定在支柱P_1及P_2上，如题 7-3 图所示。今使物体有一向右初位移$x_0=\sqrt{3}\times10^{-2}\mathrm{m}$，向右初速度$v_0=\sqrt{40}\times10^{-2}\mathrm{m/s}$，（1）试证物体作简谐振动；（2）求振动方程（设物体在振动中，两弹簧始终处于被拉伸状态）．

（分析：当物体运动时，两弹簧的形变量大小相同，并等于物体的位移量。）

7-4　原长为 0.5m 的弹簧，上端固定，下端挂一质量为 110.1kg 的物体，当物体静止时，弹簧长为 0.6m。现将物体上推，使弹簧缩回到原长，然后放手，以放手时开始计时，取竖直向下为正向，写出

振动式。（g 取 9.8）



题 7-3 图

7-5　一轻弹簧下端悬挂 m_0=100g 的砝码时，弹簧伸长 8cm，现在这根弹簧下端悬挂 m=250g 的物体，构成弹簧振子。将物体从平衡位置向下拉动 4cm，并给以向上的 21cm/s 的初速度（这时 t=0），选 x 轴向下，求振动方程的数值式。

7-6　有一单摆，摆长 $l=1.0\text{m}$，小球质量 $m=10\text{g}$，$t=0$ 时，小球正好经过 $\theta=-0.06\text{rad}$ 处，并以角速度 $\omega=0.2\text{rad/s}$ 向平衡位置运动。设小球的运动可看作简谐振动，试求：（1）角频率、频率、周期；（2）用余弦函数形式写出小球的振动式。（g 取 9.8）

7-7　两个同方向同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 20cm，与第一个振动的相位差为 $\frac{\pi}{6}$。若第一个振动的振幅为 $10\sqrt{3}\text{cm}$。则（1）第二个振动的振幅为多少？（2）两简谐振动的相位差为多少？

7-8　一质点同时参与两个同方向的简谐振动，其振动方程分别为：$x_1=0.05\cos(4t+\frac{\pi}{3})$（SI），$x_2=0.03\sin(4t-\frac{\pi}{6})$（SI），画出两振动的旋转矢量图，并求合成振动的振动方程。

7-9　已知两同振向同频率的简谐振动：

$$x_1=0.05\cos(10\,t+\frac{3}{5}\pi),\quad x_2=0.06\cos(10\,t+\frac{1}{5}\pi)\quad\text{（SI）}$$

（1）求合成振动的振幅和初相位；

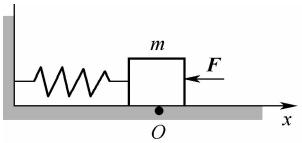
（2）另有一个同振动方向的谐振动 $x_3=0.07\cos(10\,t+\phi_3)$（SI），问 ϕ_3 为何值时 x_1+x_3 的振幅为最大，ϕ_3 为何值时 x_2+x_3 的振幅为最小；

（3）用旋转矢量图示（1）、（2）的结果。

7-10　一弹簧振子沿轴作谐振动，已知振动物体最大位移为 $x_m=0.4\text{m}$，最大恢复力为 $F_m=0.8\text{N}$，最大速度为 $v_m=0.8\pi(\text{m/s})$，又知 $t=0$ 的初位移为 0.2m，且初速度与所选 X 轴方向相反。求（1）振动的能量；（2）此振动的数值表达式。

7-11　如题 7-11 图，有一水平弹簧振子，弹簧的劲度系数 k =

24N/m，重物的质量 m = 6 kg，重物静止在平衡位置上。设以一水平恒力 F = 10 N 向左作用于物体（不计摩擦），使之由平衡位置向左运动了 0.05m 时撤去力 $\boldsymbol{F}$。当重物运动到左方最远位置时开始计时，求物体的运动方程。



题 7-11 图

7-12　一质量为 0.1kg 的物体作振幅为 0.01m 的简谐振动，最大加速度为 0.04m/s^2. 试求（1）振动的周期；（2）总的振动能量；（3）物体在何处时，其动能和势能相等？

7-13　质量为 0.25kg 的物体，在弹性力作用下作简谐振动，倔强系数 k = 25N·m^{-1}，如果开始振动时具有势能 0.6J 和动能 0.2J，求：（1）振幅；（2）位移多大时，动能恰等于势能？（3）经过平衡位置时的速度。