第 3 章　导数与微分

函数刻画变量与变量间的对应关系，仅通过函数关系求得函数值还不能满足生产、生活的需要．例如，考察某商品的需求量与商品价格间的关系：$Q = f(p)$，这里 p 是价格，f 是需求关系，试问当价格 p 发生波动时，需求量 Q 将如何变化？这个问题显然比 p 取定值时，简单地计算出 Q 要有意义的多．自然想到问题：对函数 $y = f(x)$，当自变量 x 变化时，函数关系（对应或法则）f 将如何变化？这正是本章要探讨的问题．

考查自变量 x 的变化，引起因变量 y 是如何变化的，就不得不引入极限概念，进而介绍极限的性质，运算法则等，在此基础上，讨论应用最广泛的一类特殊极限——导数或微分，从而为后续学习打好基础．

3.1　函数的极限

3.1.1　函数的极限

极限的思想是由求解某些实际问题的精确解而产生的．例如，战国时期哲学家庄周在《庄子·天下篇》中引用过惠施的一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭．"隐含了深刻的极限思想．意思是指，一根一尺长的杖子，今天取其一半，明天取其一半的一半，后天再取其一半的一半的一半，如此"日取其半"，总有一半留下，但是杖子的长度越来越小，越来越接近于零，我们就说其极限是零．

又如，魏晋时期数学家刘徽利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何上的应用．我们知道，半径为 r 的圆内接正多边形面积 S_n（n 为正多边的边数），随着边数 n 的无限增加，多边形的面积 S_n 与圆的面积之差越来越小（如图 3-1），多边形面积的极限就是圆的面积．

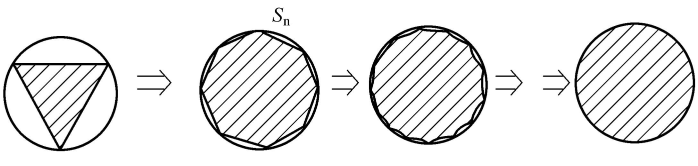

图 3-1

1．数列的极限

定义 1　设 N 为自然数集，若按某一法则 f，对每个 $n \in N$，对应一个确定的实数 $x_n = f(n)$，这些实数 x_n 按照下标从小到大排列得到一个序列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

就叫**数列**，记为 $\{x_n\}$．数列中的每一个数叫**数列的项**，x_1 称为**数列的首项**，x_n 称为**数列的通**

项（或一般项）.

例如，$x_n=(\frac{1}{2})^n$表示数列：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，…

$x_n=1+\frac{1}{n}$表示数列：2，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{4}$，…

由定义 1 可知，数列既可看作是数轴上的一个动点，它在数轴上依次取值$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$（见图 3-2），也可看作是自变量为正整数$n$的函数

$$x_n=f(n)$$

其定义域是全体正整数，当自变量n依次取 1, 2, 3, …时，对应的函数值就排成数列$\{x_n\}$，如图 3-3 所示．所以说，数列是一个特殊的函数．

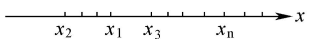

图 3-2

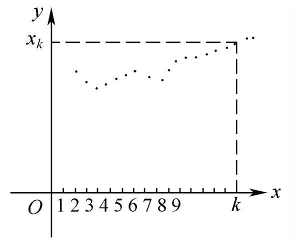

图 3-3

极限的概念最初是在运动观点的基础上，凭借几何直观产生的直觉用自然语言来定性描述的．下面以横轴表示整标 n，纵轴表示数列取值x_n，作$x_n=1+\frac{1}{n}$的图形，如图 3-4 所示．

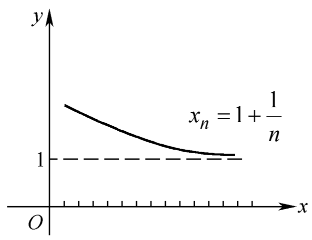

图 3-4

观察上图不难发现，当n无限增大时（记为$n\to\infty$），x_n无限地接近于 1．或者说，随着n无限增大，x_n与 1 的距离（用$|x_n-1|$表示）逐渐变小并无限接近于 0．实际上，由数列的通项表达式也容易知道，当$n>100$时，$|x_n-1|=\left|1+\frac{1}{n}-1\right|<\frac{1}{100}$；当$n>1000$时，$|x_n-1|<\frac{1}{1000}$；当$n>10000$时，$|x_n-1|<\frac{1}{10000}$；…．根据以上分析，定义数列极限如下：

定义 2　设$\{x_n\}$是一个数列，a是一个常数．如果当数列的项数n无限增大时，数列的通项x_n无限接近于常数a，即x_n与a的距离无限接近于 0．则称a为数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的**极限**，或称数列$\{x_n\}$**收敛**于a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\text{，或}x_n\to a\ (n\to\infty)$$

如果一个数列没有极限，则称这个数列是**发散**的．例如，当 $n \to \infty$ 时，$x_n = (\frac{1}{2})^n$ 收敛于 0；$y_n = 1 + \frac{1}{n}$ 收敛于 1；而 $z_n = 2n \to \infty$，无极限，所以它是发散的；$w_n = (-1)^n$ 时而取 1，时而取 -1，我们说它是振荡无极限，因而也是发散的．

如果一个数列 $\{x_n\}$：

$$x_n = C，\quad n = 1, 2, \cdots$$

这里 C 是一个常数．很明显，它的极限是 C，则称这个数列是平凡的．

数列是定义于正整数集合上的函数 $x_n = f(n)$，它的极限可看作一种特殊函数（整标函数）的极限．若将数列极限概念中自变量 n 和函数 $f(n)$ 的特殊性撇开，可以由此引出函数极限的一般概念：在自变量 x 的某个变化过程中，如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某个确定的常数 A，则称 A 为 x 在该变化过程中函数 $f(x)$ 的极限．显然，极限 A 的值与自变量 x 的变化过程紧密联系，自变量的变化过程不同，函数的极限就有不同的结果．下面分下列两种情况来讨论：

（1）自变量趋于无穷大($x \to \infty$)时函数的极限；

（2）自变量趋于有限值($x \to x_0$)时函数的极限．

2.　$x \to \infty$ 时函数的极限

$x \to \infty$ 表示 $|x|$ 无限增大，也就是 x 的取值往实轴的两端无限延伸；当 $x > 0$ 且无限增大时，记为 $x \to +\infty$，表示 x 的取值往实轴的正方向无限延伸；当 $x < 0$ 且无限减小时，记为 $x \to -\infty$，表示 x 的取值往实轴的负方向无限延伸．

观察函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图形，如图 3-5 所示．易见，当 $|x|$ 无限增大时，函数的图形无限接近于 x 轴，在几何上，相当于双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 具有水平渐近线 $y = 0$．显然，随着 $|x|$ 无限增大，双曲线上的点与 x 轴上的点的距离逐渐变小并无限接近于 0．因此，0 便是函数 $y = \frac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的极限．一般地，有

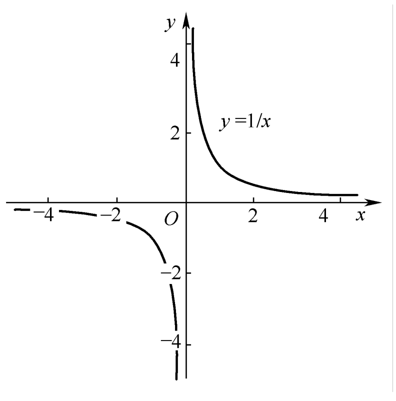

图 3-5

定义 3　设 X 是一个正数，A 为常数，函数 $f(x)$ 当 $x > X$ 时有定义．如果当 x 无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于 A，即 $f(x)$ 与 A 的距离无限接近于 0，则称 A 为函数 $f(x)$

当 $x\to+\infty$ 时的极限．记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\quad(x\to+\infty) \text{ 或 } f(+\infty)=A$$

若函数 $f(x)$ 当 $x<-X$ 时有定义，且当 $|x|$ 无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限．记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\quad(x\to-\infty) \text{ 或 } f(-\infty)=A$$

更一般地，若函数 $f(x)$ 当 $|x|>X$ 时有定义，且当 $|x|$ 无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限．记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty) \text{ 或 } f(\infty)=A$$

根据以上定义，不难知道有如下定理成立．

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$．

例 1 考察函数 $y=\arctan x$ 当 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 时的极限．

解 当 $x\to-\infty$ 时，函数 $y=\arctan x$ 的图形无限接近于 $y=-\frac{\pi}{2}$，即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$；当 $x\to+\infty$ 时，函数 $y=\arctan x$ 的图形无限接近于 $y=\frac{\pi}{2}$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$

从而根据定理 1 可知：$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在．

3． $x\to x_0$ 时函数的极限

例 2 设 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，$x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$．考察自变量 x 趋于 2 时，函数 $f(x)$ 的变化规律．

解 通过计算得到表 3-1．

表 3-1 函数 $f(x)$ 当 $x\to2$ 时的变化情况

x	1.5	1.75	1.9	1.99	1.9999	…	2.0001	2.01	2.1	2.25	2.5
$f(x)$	3.5	3.75	3.9	3.99	3.9999	…	4.0001	4.01	4.1	4.25	4.5

不难看出，虽然 $f(x)$ 在 $x=2$ 处没有定义，但当 x 越来越接近 2 时，$f(x)$ 与 4 的差越来越接近于 0．这时我们称当 $x\to2$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的极限就是 4．

例 3 设 $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$．考察自变量 x 趋于 0 时，函数 $g(x)$ 的变化规律．

解 通过计算得到表 3-2．

表 3-2 函数 $g(x)$ 当 $x\to0$ 时的变化情况

x(rad)	±1.0	±0.8	±0.6	±0.5	±0.4
$\frac{\sin x}{x}$	0.84147	0.89670	0.94107	0.95885	0.97355
x(rad)	±0.3	±0.2	±0.1	±0.01	$\cdots\to0$
$\frac{\sin x}{x}$	0.98507	0.99335	0.99833	0.99998	$\cdots\to1$

由上表可知，$g(x)$ 在 $x=0$ 处也没有定义，但当 x 越来越接近 0 时，$g(x)$ 与 1 的差越来越接近于 0．这时我们称当 $x\to 0$ 时，函数 $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的极限是 1．这个极限是后面将要介绍的第一个重要极限．

由上面两个例子可以看出，考虑一个函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，本质上是在考察当自变量 x 接近于点 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 是否会接近于一个固定的常数 A．这与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有没有定义并无关系．因此有

定义 4　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，A 为常数．如果当 x 无限接近于 x_0 时，对应的函数值无限接近于 A，即 $f(x)$ 与 a 的距离无限接近于 0．则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限．记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0)$$

在上述定义中，$x\to x_0$ 是指自变量 x 既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋于 x_0．但有时候只能或只需考虑 x 从 x_0 的其中一侧趋于 x_0．如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心左邻域内有定义（此时 $x<x_0$），当 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0 时，对应的函数值无限接近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0^-) 或 f(x_0-0)=A$$

类似地，可定义函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**右极限**

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0^+) 或 f(x_0+0)=A$$

注意：$f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 不是函数值符号，而是函数的左、右极限符号．

左极限与右极限统称为**单侧极限**．结合定义 4 以及左、右极限的定义，有如下定理：

定理 2　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$．

定理 2 指出，函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左、右极限各自存在并且相等．因此，即使左、右极限都存在，但若不相等，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 也不存在．

例 4　考察函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ 当 $x\to 0$ 时的极限．

解　当 $x\to 0$ 时，函数极限不存在．（见图 3-6）

这是因为，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$．

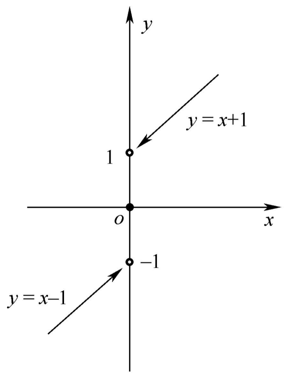

图 3-6

例 5　定义函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\neq 1 \\ 2, & x=1 \end{cases}，求下列极限：$$

（1）$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$．

解　函数图形如图 3-7 所示.

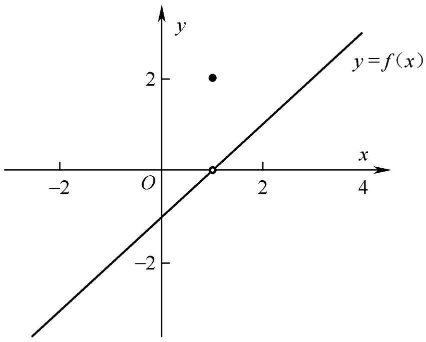

图 3-7

（1）因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.

（2）同理可得， $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$.

一般地，分段函数在分段点要考虑左右极限，在其它点可以不考虑．另外，本节所给出的极限定义是建立在直观的几何概念——距离之上的，其形式较为简单也易于理解．现代数学中，更为严谨的极限定义是由法国数学家柯西（Cauchy）提出，后为德国数学家维尔斯特拉斯（Weierstrass）总结得到的“$\varepsilon-N$”和“$\varepsilon-\delta$”定义，其形式详见本节后的附录.

下面再给出函数极限的三条性质，其证明从略.

性质 1（函数极限的唯一性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则这极限是唯一的.

性质 2（函数极限的局部有界性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在常数 $M>0$，使得在 x_0 的某去心邻域内有 $|f(x)|\leqslant M$.

性质 3（函数极限的局部保号性）　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则在 x_0 的某去心邻域内有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

例如，设 $f(x)=x+2$， $x_0=1$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=3=A>0$，因此我们可以找到 x_0 的一个去心邻域 $\mathring{U}(1,\frac{1}{2})=(\frac{1}{2},1)\cup(1,\frac{3}{2})$，在该去心邻域内， $f(x)>0$，如图 3-8 所示.

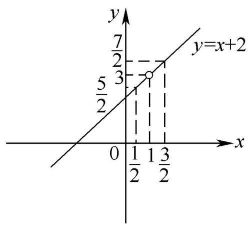

图 3-8

推论 1　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

3.1.2　无穷小与无穷大

1．无穷小

定义 5　如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷小**，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$$

例如，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，所以函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小；因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，所以函数 $f(x)=x-1$ 为当 $x\to1$ 时的无穷小.

注意：无穷小不是绝对值很小的常数. 无穷小是指自变量的某一变化过程中，以零为极限的函数. 零是唯一一个可以作为无穷小的常数.

无穷小具有下列性质：

性质 1　有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

例如，当 $x\to0$ 时，x 与 $\sin x$ 都是无穷小，$x+\sin x$ 也是无穷小.

性质 2　有限个无穷小的乘积仍为无穷小.

性质 3　无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小.

例 6　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

解　因为 $\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\sin x$，当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷小，$\sin x$ 的极限不存在，但 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界. 由性质 3 可得 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

无穷小与有极限的函数之间有一个很重要的联系，下面不加证明地给出如下定理：

定理 3　在自变量的同一变化过程中，函数 $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是：

$$f(x)=A+\alpha$$

其中 α 是该过程中的无穷小，这个过程指 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）.

定理 3 的结论在今后的学习中有重要的应用，尤其是在理论推导或证明中. 它将函数极限的运算转化为常数与无穷小的代数运算.

2. 无穷大

定义 6　如果对于任意给定的正数 M（不论它多么大），总存在 x_0 的某去心邻域（或正数 X），使得该去心邻域内（或 $|x|>X$）的一切 x 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)|>M$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为**无穷大**，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty \text{ 或 } \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty .$$

例如，对于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 的情形，设 $f(x)=x^2$，任取正数 $M=10000$，则存在 $X=100$，使得当 $|x|>X=100$ 时，$|f(x)|>M=10000$，如图 3-9 所示.

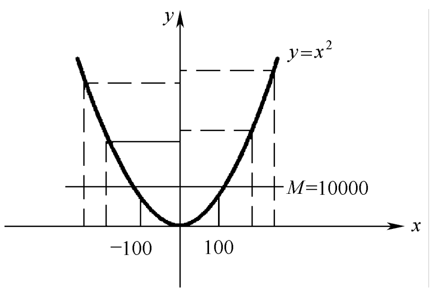

图 3-9

关于无穷大，不可与很大的数混为一谈，它体现了函数值变化的性态．按通常定义来说，极限是不存在的，但是为了叙述函数这一性态的方便，也说“函数的极限为无穷大”.

如果在无穷大的定义中，把$|f(x)|>M$换成$f(x)>M$（或$f(x)<-M$），则称函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时为**正无穷大**（或**负无穷大**），记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty，\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty .$$

例如，函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$当$x\to 0^+$时为正无穷大，即$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$；当$x\to 0^-$时为负无穷大，即$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$；当$x\to 0$时，$f(x)$为无穷大.

又如，当$x\to-\infty$时，$a^x\to+\infty(0<a<1)$，是正无穷大；当$x\to 0^+$时，$\ln x\to-\infty$，是负无穷大，等等.

例 7　求$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$.

解　因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$，所以根据定理 1 可知$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$不存在.

无穷小与无穷大之间有一种简单的关系，即

定理 4　在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，且$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

根据这个定理，我们可将无穷大的讨论归结为关于无穷小的讨论.

例 8　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{x^3+5}$.

解　因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{x^4}=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^4})=0$$

所以，根据无穷小与无穷大的关系有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^3+5}=\infty .$$

3.1.3　极限的运算法则

关于极限的运算，有如下定理：

定理 5　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，那么

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$（$B\neq 0$）.

这些法则对于 $x \to \infty$ 时的情况也成立.

证　这里只给出（1）的证明.

因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$， $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，根据极限与无穷小的关系，当 $x \to x_0$ 有

$$f(x) = A + \alpha，\quad g(x) = B + \beta$$

其中 α 及 β 为 $x \to x_0$ 时的无穷小．于是

$$f(x) \pm g(x) = (A + \alpha) \pm (B + \beta) = (A \pm B) + (\alpha \pm \beta)$$

即 $f(x) \pm g(x)$ 可表示为常数 $A \pm B$ 与无穷小 $\alpha \pm \beta$ 之和．因此

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} [(A \pm B) + (\alpha \pm \beta)] = A \pm B\ .$$

上述极限运算法则表明：函数的和、差、积、商（分母的极限不为 0）的极限等于它们极限的和、差、积、商，而且法则（1)、(2）可以推广到有限多个具有极限的函数的情形.

推论 1　$\lim\limits_{x \to x_0} [Cf(x)] = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$（$C$ 为常数）

即常数因子可以提到极限符号外面.

推论 2　$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^n$

注意：上述定理给求极限带来很大方便，但应注意，运用该定理的前提是被运算的各个函数的极限必须存在，并且在除法运算中，还要求分母的极限不为零.

例 9　求 $\lim\limits_{x \to 1} (2x - 1)$.

解　$\lim\limits_{x \to 1} (2x - 1) = \lim\limits_{x \to 1} 2x - \lim\limits_{x \to 1} 1 = 2 \lim\limits_{x \to 1} x - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

例 10　求 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3}$.

解　$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(x^3 - 1)}{\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 5x + 3)} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} x^3 - \lim\limits_{x \to 2} 1}{\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 5 \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 3}$$

$$= \frac{(\lim\limits_{x \to 2} x)^3 - 1}{(\lim\limits_{x \to 2} x)^2 - 5 \cdot 2 + 3} = \frac{2^3 - 1}{2^2 - 10 + 3} = -\frac{7}{3}\ .$$

从上面这个例子可以注意到，函数的极限值就是将 x_0 代替函数中的 x 算出的结果．事实上，对于有理整函数（多项式）及有理分式函数，当将 x_0 代替函数中的 x 且分母不等于零时，这种做法都是可行的．即

设多项式 $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ \ldots\ + a_{n-1} x + a_n$，则

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

又设有理分式函数 $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x), Q(x)$ 为多项式，若 $Q(x_0) \neq 0$，则

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = F(x_0)$$

但必须注意，若$Q(x_0)=0$，则关于商的结论不能应用，需要特别考虑.

例 11 求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

解 当$x\to 3$时，分母的极限为 0，这时不能应用法则（3）. 但在$x\to 3$的过程中，由于$x\neq 3$，即$x-3\neq 0$，而分子及分母有公因式$(x-3)$，故在分式中可约去极限为零的公因式$(x-3)$，所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

例 12 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=\dfrac{1^2-5\cdot 1+4}{2\cdot 1-3}=0$，根据无穷大与无穷小的关系得

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty.$$

例 13 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^3-2x-1}$.

解 当$x\to\infty$时，分子、分母的极限均为∞，即$\dfrac{\infty}{\infty}$型. 当$x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}\to 0$，我们先把分子、分母同时除以x^3，然后分子、分母取极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^3-2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{3-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{3}.$$

例 14 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^4-2x-1}$.

解 先把分子、分母同时除以x^4，然后分子、分母取极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^4-2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x^4}}{3-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}=\frac{0}{3}=0.$$

例 15 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-x^2+5}{3x^3-2x-1}$.

解 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x-1}{2x^5-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^4}-\dfrac{1}{x^5}}{2-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x^5}}=0$$

根据无穷小与无穷大的关系，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-x^2+5}{3x^3-2x-1}=\infty .$$

注意：求有理函数 $f(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$（$a_0\neq 0,b_0\neq 0$）的极限时，可以把分子、分母同时除以分子、分母的最高次幂，然后分子、分母分别求极限，有如下结论:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ \infty, & n>m\end{cases}.$$

附录：数列及函数极限的定义

1．数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义

定义　设 $\{x_n\}$ 是一个数列，如果存在一个实数 a，对于任意给定的正数 ε，总存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

恒成立，则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a\ (n\to\infty)$$

在这个定义中，$|x_n-a|<\varepsilon$ 是指以 a 为中心，ε 为半径的去心邻域 $\mathring{U}(a,\varepsilon)$，$n>N$ 是指从 x_{N+1} 项起的后面诸项．从几何上看，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 是指从 x_{N+1} 项起，数列 $\{x_n\}$ 所有项都要落在 $\mathring{U}(a,\varepsilon)$ 内．至于 ε 的任意性，意味着 $\mathring{U}(a,\varepsilon)$ 可以任意收缩，而不管它如何小，数列总有从某项开始起全部项落在其中，a 就成了这个数列最终凝聚的地方．如图 3-10 所示．

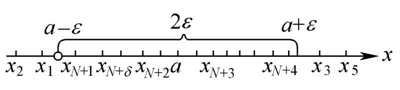

图 3-10

2．函数的极限的 $\varepsilon-X$ 定义

定义　设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在一个 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty) \text{ 或 } f(\infty)=A$$

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的几何意义：作直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$，则从存在一个正数 X，使得当 $|x|>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图形位于这两条直线之间，如图 3-11 所示．

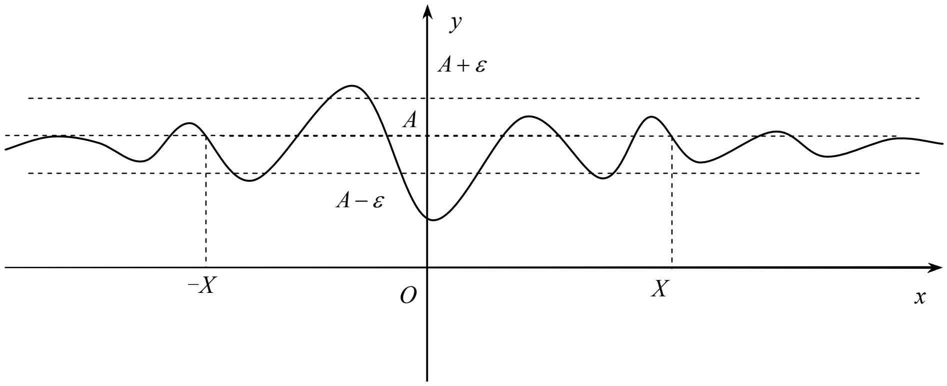

图 3-11

3．函数的极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义，若存在一个数 A，对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 或 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称 A 为当 x 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限，记为：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0)$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的几何解释：任意给定一正数 ε，作平行于 x 轴的两条直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$．根据定义，对于给定的 ε，存在点 x_0 的一个去心邻域 $0<|x-x_0|<\delta$，当 $y=f(x)$ 的图形上的点的横坐标 x 落在该邻域内时，这些点对应的纵坐标落在带形区域 $A-\varepsilon<y<A+\varepsilon$ 内，如图 3-12 所示.

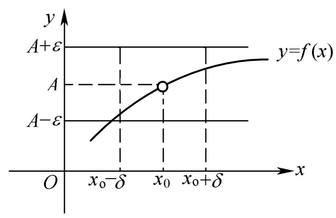

图 3-12

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

证 因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]\in N^+$，使得当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-1|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

证 因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，使得当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|<\varepsilon$$

所以，$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

习题 3.1

1．观察一般项 x_n 如下的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，写出它们的极限：

（1）$x_n = \frac{1}{3^n}$　　（2）$x_n = 2 + \frac{1}{n^3}$

（3）$x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$　　（4）$x_n = \frac{n-1}{n+1}$

2．观察下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x}$　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{2})^x$

（3）$\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{1}{2})^x$　　（4）$\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2-9}{x+3}$

（5）$\lim\limits_{x\to0}(2x-5)$　　（6）$\lim\limits_{x\to1}\ln x$

3．设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ \mathrm{e}^x, & x\geqslant 0 \end{cases}$，画出 $f(x)$ 的图形，并求 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$，讨论 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 是否存在？

4．设 $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & x\leqslant 0 \\ x^2+1, & 0<x\leqslant 1 \\ \frac{2}{x}, & x>1 \end{cases}$，分别讨论 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$、$\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ 是否存在.

5．求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^3-2x+5}$　　（2）$\lim\limits_{x\to0}(1-\frac{2}{x-3})$

（3）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2-\cos x}{\sin x}$　　（4）$\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$

（5）$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$　　（6）$\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-3}{x-2}$

（7）$\lim\limits_{x\to0} \frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$　　（8）$\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

（9）$\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{1-x^2}$　　（10）$\lim\limits_{h\to0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

（11）$\lim\limits_{h\to0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$　　（12）$\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2}{1-\sqrt{x^2+1}}$

（13）$\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$　　（14）$\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$

（15）$\lim\limits_{x\to-1}(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x^2-1})$　　（16）$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{6x-1}$

（17）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x}{1+x^2}$

（18）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^2}{n+1}$

（19）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{3x^2+1}$

（20）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}x}{1+x^2}$

（21）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}x^2}{1+x}$

（22）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{1-x^2}+\dfrac{x^2}{1+x})$

（23）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x-2}{x^5-2x+3}$

（24）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$

（25）$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{u^3+1}}{u+1}$

（26）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+2x)^2}{3x^2+1}$

（27）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+2)(x+1)}-x)$

（28）$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})(2+\dfrac{1}{x^2})$

（29）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2})$

（30）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}$

6．若 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-k}{x-3}=4$，求 k 的值.

7．若 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a,b 的值.

8．若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$，求 a,b 的值.

3.2 极限存在准则　两个重要极限

到现在为止，我们对数列和函数的极限定义、性质以及四则运算法则已经有了比较清楚的了解. 然而，如何判定一个给定的数列或函数的极限收敛性，还是需要进一步讨论的问题. 下面就以函数极限存在性的判定，介绍一些方法.

3.2.1 夹逼准则

准则 1 如果 $f(x)$ 介于另外两个函数 $g(x)$ 及 $h(x)$ 之间，即 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 成立，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

证 对任意的 $\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=Aa$，所以存在 $\delta_1>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，恒有 $|g(x)-A|<\varepsilon$ 成立，即

$$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon \tag{3.1}$$

又由于 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，所以存在 $\delta_2>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，恒有 $|g(x)-A|<\varepsilon$ 成立，即

$$A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon \tag{3.2}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，（3.1）式与（3.2）式同时成立，所以

$$A-\varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < A+\varepsilon$$

从而 $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

准则 1 中的 $x\to x_0$ 可以换成 $x\to\infty$，证明方法类似.

准则 1 不仅告诉我们怎样去判定一个函数（或数列）极限是否存在，同时也给了我们一种新的求极限的方法．作为准则 1 的应用，下面证明 2.1 节中例 3 的猜测结果：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

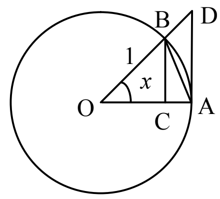

图 3-13

首先我们建立一个有用的不等式

$$\sin x < x < \tan x \qquad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

考察图 3-13 中的单位圆，则有

$$\Delta AOB \text{ 的面积 } < \text{ 扇形 } AOB \text{ 的面积} < \Delta AOD \text{ 的面积}$$

若用 x 表示圆心角 $\angle AOB$ 的弧度，则弧长 $\overset{\frown}{AB}$ 就可以用 $x\,(0<x<\frac{\pi}{2})$ 表示，于是上述不等式可以写成

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

即

$$\sin x < x < \tan x$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{或} \quad 0 < 1-\frac{\sin x}{x} < 1-\cos x$$

但 $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x$，于是

$$0 < 1-\frac{\sin x}{x} < x$$

根据准则 1 知

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1 .$$

类似地，此不等式当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时也成立，可证 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = 1$，这就回答了我们猜测的正确性.

注意：关于上面的重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$，这里 $x\to 0$ 的条件很重要．当自变量 x 的变化趋势发生变化时，$\frac{\sin x}{x}$ 的极限也将发生变化，例如，当 $x\to\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}=1\times1=1$.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot2)=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}$.

设 $t=2x$，则当 $x\to0$ 时，$t\to0$，所以，$2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=2\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=2\times1=2$.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{\frac{x}{2}\to0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1^2=1$.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}\cdot\dfrac{3}{4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\sin 4x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}$.

注意：在极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 中，x 可以进行替换，只要满足 $\square\to0$，那么

$$\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

其中，$\square$ 代表同一变量.

3.2.2 单调有界收敛准则

准则 2 单调有界数列必有极限.

准则 2 的严格证明要用到实数理论的知识，这里不作证明，只给出几何解释.

当数列 $\{x_n\}$ 单调增加，且 $|x_n|<M$ 时，在数轴上画出数列 $\{x_n\}$ 的点，如图 3-14 所示，随着 n 的增大，点 x_n 沿数轴只可能向右一个方向移动，且不超过点 M，则 x_n 只能无限接近某个定点 A（点 A 不在点 M 的右侧），这样点 A 就是数列 $\{x_n\}$ 的极限点，对于数列 $\{x_n\}$ 单调减少，且 $|x_n|<M$ 时，可作同样的解释.

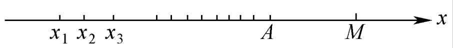

图 3-14

作为准则 2 的应用，下面来讨论另一个重要的极限：

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$，现证明数列 $\{x_n\}$ 是单调有界的．由牛顿二项式公式，有

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\ \cdots\ (n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ \cdots\ (1-\frac{n-1}{n}),$$

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\ \cdots\ (1-\frac{n-1}{n+1})$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\ \cdots\ (1-\frac{n}{n+1}).$$

比较 x_n , x_{n+1} 的展开式，可以看出除前两项外，x_n 的每一项都小于 x_{n+1} 的对应项，并且 x_{n+1} 还多了最后一项，其值大于 0，因此 $x_n < x_{n+1}$，这就是说数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的．

这个数列同时还是有界的．因为 x_n 的展开式中各项括号内的数用较大的数 1 代替，得

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ \cdots\ \frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ \cdots\ +\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

根据准则 2，数列 $\{x_n\}$ 必有极限，这个极限我们用 e 来表示，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}$.

注意对任意正实数 x，都存在正整数 n，使得 $n\leqslant x<n+1$，所以利用准则 1，可以证明

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$$

数 e 是个无理数，它的值是

$$\mathrm{e}=2.718281828459045\cdots$$

初等函数中的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 以及对数函数 $y=\ln x$ 中的底数 e 就是这个常数．

在极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 中，令 $t=\frac{1}{x}$，则 $t\to 0$，于是极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 又可以表示为

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$$

通常也记为

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

解　先将 $1+\frac{2}{x}$ 写成下列形式：$1+\frac{2}{x}=1+\frac{1}{\frac{x}{2}}$. 然后令 $t=\frac{x}{2}, x=2t$，由于当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$，从而

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2=\mathrm{e}^2.$$

例 6　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$．

解　令 $t=-x$，则 $x=-t$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$，从而

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 7　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$．

解　设 $t=\tan x$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}.$$

例 8　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+\frac{3}{2}}$．

解　因为 $\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{2x+1-2}{2x+1}\right)^{x+\frac{3}{2}}=\left(1+\dfrac{-2}{2x+1}\right)^{x+\frac{3}{2}}$．

设　$t=\dfrac{-2}{2x+1}$，则 $x=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{t}$，由于当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+\frac{3}{2}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{1-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)(1+t)^{-\frac{1}{t}}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}(1+t)\cdot\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-1}=1\times\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

注意：应用此结论时一定要注意形式（如 1，+，$\dfrac{1}{x}$，指数 x）的一致性，细小的变化都会产生不同的结果．同第一个重要极限一样，自变量 x 可以进行替代，只要满足$\square\to\infty$，那么

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=1$$

其中，□代表同一变量．

例 9　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$．

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$．

3.2.3　连续复利问题

在 2.2 节中，我们讨论了银行存款利息的问题，那里存款及利率是常量，而事实上存款及利率是不断变化着的，这时如何计息？

设某顾客向银行存入本金 p 元，年利率为 r 且在存期内不变，按复利计息，t 年后他在银

行的存款总额是本金与利息之和.

如果每年结算一次，一年后顾客存款额为 $A_1 = p + pr = p(1+r)$，第二年后顾客存款额为 $A_2 = p_1(1+r) = p(1+r)^2$，根据这样的递推关系可知，第 t 年后顾客的存款额为 $A_t = p(1+r)^t$.

如果每月结算一次时，则月利率为 $r/12$，每年结算 12 次，故 t 年后顾客存款额变为

$$A_t = p(1+\frac{r}{12})^{12t}$$

如果每天结算一次时，则日利率为 $r/365$，每年结算 365 次，故 t 年后顾客存款额变为

$$A_t = p(1+\frac{r}{365})^{365t}$$

一般地，设银行每年结算 m 次时，则每个计算周期的利率为 r/m，t 年后顾客的存款额为

$$A_t = p(1+\frac{r}{m})^{mt} > p(1+\frac{r}{12})^{12t} > p(1+r)^t$$

这就是说，一年计算 m 次复利的本金与利息之和比一年计算一次复利的本金与利息之和要大，且复利计算次数越多，计算所得的本利和数额就越大，但也不是无限增大，因为

$$\lim_{m\to\infty} p(1+\frac{r}{m})^{mt} = \lim_{m\to\infty} p(1+\frac{r}{m})^{\frac{m}{r}\cdot rt} = p\mathrm{e}^{rt}$$

所以，顾客在 t 年后的本金与利息之和为

$$A_t = p\mathrm{e}^{rt}\text{（}p\text{ 为本金，}r\text{ 为年利率）}$$

上述极限称为**连续复利公式**.

例 10　小孩出生之后，父母拿出 p 元作为初始投资，希望到孩子 20 岁生日时增长到 100000 元，如果投资按 8%连续复利，计算初始投资应该是多少？

解　利用公式 $A_t = p\mathrm{e}^{rt}$，求 p，现有方程

$$100000 = p\mathrm{e}^{0.08\times 20}$$

由此得到

$$p = 100000\mathrm{e}^{-1.6} \approx 20189.65$$

于是，父母现在必须存储 20189.65 元，到孩子 20 岁生日时才能增长到 100000 元.

3.2.4　无穷小的比较

1．无穷小的比较

在同一个变化过程中，无穷小虽然都是趋于零的变量，但不同的无穷小趋于零的速度却不一定相同，还有可能差别很大.

例如，当 $x\to 0$ 时，x，x^2，$3x$ 都是无穷小，但它们趋于零的速度不同，列表比较如下：

表 3-4　x，x^2，$3x$ 趋于零的速度比较

x	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	…	$\to 0$
x^2	1	0.01	0.0001	0.000001	0.000001	…	$\to 0$
$3x$	1	0.3	0.03	0.003	0.0003	…	$\to 0$

由表可见，$x^2\to 0$ 比 $x\to 0$ 的速度要快得多，而且越到后来越快，而 $3x\to 0$ 与 $x\to 0$ 的速度相当.

速度的快慢是相对的，是相互比较而言的，下面通过比较两个无穷小趋于零的速度引入无穷小的阶的概念.

定义 1 设α,β是在自变量变化的同一过程中的两个无穷小，且$\alpha \neq 0$.

（1）如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=0$，就说$\beta$是比$\alpha$**高阶的无穷小**，记作$\beta=o(\alpha)$；

（2）如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说$\beta$是比$\alpha$**低阶的无穷小**；

（3）如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$（$c$为常数），就说$\beta$是与$\alpha$**同阶的无穷小**；

（4）如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$，就说$\beta$与$\alpha$是**等价无穷小**，记作$\alpha\sim\beta$.

例如，因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$，所以当$x\to 0$时，$x^2$是比$x$高阶的无穷小，即$x^2=o(x)$ ($x\to 0$)；

又例如，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3$，所以当$x\to 0$时，$3x$是$x$的同阶无穷小；由第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$知，$\sin x$与$x$当$x\to 0$时是等价无穷小，即$\sin x\sim x$.

例 11 证明：当$x\to 0$时，$\arcsin x\sim x$.

证 令$u=\arcsin x$，$x=\sin u$，则当$x\to 0$时，$u\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1$$

所以，当$x\to 0$时，$\arcsin x\sim x$.

根据等价无穷小的定义，可以证明，当$x\to 0$时，有下列常用的等价无穷小关系：

$\sin x\sim \tan x\sim \arcsin x\sim \arctan x\sim x$；

$\ln(1+x)\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a$；

$(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x$（$\alpha\neq 0$且为常数）；

$1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2$.

注意：（1）上述等价关系式成立的前提条件是：$x\to 0$；

（2）如果$f(x)$是自变量某一变化过程中的无穷小量，那么用$f(x)$代替上述等价关系式中的x，等价关系依然成立.

例如，当$x\to 1$时，有$x^2-1\to 0$，从而

$$\sin(x^2-1)\sim x^2-1\quad (x\to 1).$$

2．等价无穷小

由定义 1 可知，等价无穷小是同阶无穷小的特殊情况，它们趋于零的速度不仅相同，而且最后几乎相等，其比值的极限为 1，那么在计算极限时，它们能不能相互替代呢？如果能够替代，要满足什么条件？

定理 1 设$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且$\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在，则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

证 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim(\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{\alpha'}{\beta'}\frac{\beta'}{\beta})=\lim\frac{\alpha}{\alpha'}\lim\frac{\alpha'}{\beta'}\lim\frac{\beta'}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

定理 1 表明：在计算两个无穷小之比的极限时，分子和分母都可以用等价无穷小来替换，这种替换有时可以简化计算.

例 12 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 5x}{\sin 3x}$.

解 因为当 $x\to0$ 时，$3x\to0$，所以 $\sin 3x\sim 3x$. 同理，$\tan 5x\sim 5x$ ，于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}\ .$$

例 13 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sqrt{1+x}-1}$.

解 当 $x\to0$ 时，$e^x-1\sim x$ ，$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$ ，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\frac{1}{2}x}=2\ .$$

例 14 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\tan x}$.

解 $$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^2\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

而当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ ，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}\ .$$

注意：*在计算两个无穷小之和的极限时，不能应用定理 1，在例 14 中，如果将分子的 $\tan x$ 和 $\tan x$ 同时替换为 x ，那么极限为零，显然是错误的.*

习题 3.2

1．计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$　　（4）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

（5）$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\cot x$　　（6）$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

（7）$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\arcsin 3x}{3x}$　　（8）$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$

2．计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{3}{x})^x$　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2}-1}$

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1+x}{x})^{2x}$　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{x+1})^{3x}$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x+3}{2x-1})^{x+1}$　　（6）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$

（7）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1+x}{x}}$　　（8）$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{3-x}{3})^{\frac{2}{x}}$

（9）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$　　（10）$\lim\limits_{x\to 1^+}(1+\ln x)^{\frac{5}{\ln x}}$

3．比较下列无穷小是否同阶，若不同阶，哪一个是更高阶的？

（1）x^2 与 $\sin x$　$(x\to 0)$　　（2）$2x-x^2$ 与 x^2-x^3　$(x\to 0)$

（3）$1-x$ 与 $1-x^2$　$(x\to 1)$　　（4）$\dfrac{1}{x^2}$ 与 $\dfrac{1}{x}$　$(x\to\infty)$．

4．计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cos x$

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$　　（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}$

5．利用等价无穷小的性质，计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{\sin 5x}$　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot(\mathrm{e}^{5x}-1)}{\tan x^2}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\arcsin x^2}$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-1)(\tan x)^2}{(\sin x)^3}$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x\arctan x}$　　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(\arctan x)^3}$

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{x}$　　（8）$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

6．当 $x\to 0$ 时，若 $1-\cos mx$ 与 $2x^n$ 等价，求 m 和 n 的值．

3.3　函数的连续性

3.3.1　连续函数的概念

前面已介绍了函数极限的概念、基本性质和计算方法，与函数极限的概念密切联系着的另一个数学概念是函数连续性的概念．什么是函数的连续？先回顾我们已学过的几个实例．

例 1　设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$x\neq 0$，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$f(x)$ 的图形如图 3-15 所示．此例表明：$f(x)$ 在点 $x=0$ 处无意义，但在该点处存在极限．

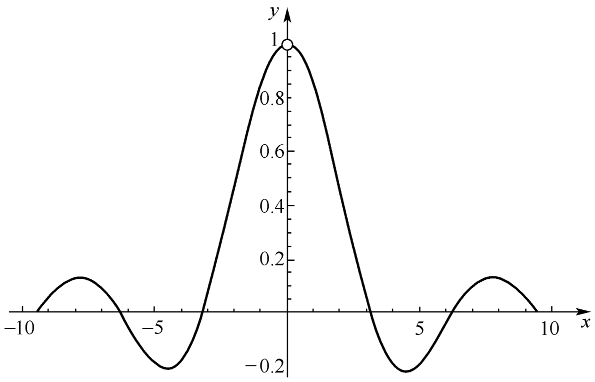

图 3-15

例 2　设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$，尽管 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

例 3　设 $f(x)=|x|$，$x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$．此例表明：函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处极限存在且等于其函数值.

上述 3 个例子中，第 3 个例子揭示了函数的特殊本性，即设 $x_0\in D_f$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$．

函数是用于描绘人类生产生活中产生各种问题的工具，而正是函数这种特殊本性，恰好刻画了气温的变化、植物的生长、河流的流动等自然现象．由此，我们引入：

定义 1　如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处满足以下三个条件：

（1）$f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义（即 $f(x_0)$ 存在）；

（2）$f(x)$ 在 x_0 处有极限（即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在）；

（3）$f(x)$ 在 x_0 处的极限值等于函数值（即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$），

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处**连续**，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**连续点**.

这里，我们必须指出的是：对于函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的连续性，首先要求的是极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，其次要求这个极限与函数 $f(x)$ 在 x_0 处所取得得函数值 $f(x_0)$ 要相同．也就是说，条件（3）不能从条件（2）推出来，例如函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，而 $f(0)=1$．

例 4　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，而 $f(0)=0$，故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

例 5　设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x<0\\ b, & x=0\\ a+x, & x>0\end{cases}$，当 a、b 为何值时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，$f(0)=b$．因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的左右两侧函数表达式不一样，所以需要讨论左右极限．又因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a\text{，}\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^x=1$$

故要使 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，必有 $a=1$

根据函数连续定义，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$，故 $b=1$

所以当 $a=1,b=1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

由例 5 可以看出，函数在 $x=x_0$ 处连续的充要条件是：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$．

定义 2 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及 x_0 的左邻域 $(x_0-\delta,x_0]$ 内有定义，且满足

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)\text{，}$$

则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**．类似地，如果有

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**.

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续等价于 $y=f(x)$ 在 x_0 处既是左连续又是右连续.

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内任意一点处都连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，区间 (a,b) 称为 $f(x)$ 的**连续区间**．如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且在点 a 处右连续，在点 b 处左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

例如，$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，因为在任意一点处，都有 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$；又例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上连续.

根据极限的四则运算法则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0 \tag{3.3}$$

函数在一点的连续性还有另一种描述方法，这里先引入增量的概念.

设变量 u 从它的一个初值 u_1 变到终值 u_2，则称终值 u_2 与初值 u_1 的差 u_2-u_1 为变量 u 的**增量**，记作 Δu，即

$$\Delta u=u_2-u_1\text{．}$$

增量 Δu 可以是正的，也可以是负的，且 Δu 是一个整体记号，切忌不要把 Δ 与变量 u 拆开.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，当自变量 x 在邻域内从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 y 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，因此函数 y 的对应增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\text{．}$$

对于（3.3）式，设 $x=x_0+\Delta x$，则 $x\to x_0$ 等价于 $\Delta x\to 0$，$f(x)-f(x_0)\to 0$ 等价于

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0 \quad \text{即} \quad \Delta y\to 0 \quad (\Delta x\to 0)\text{．}$$

这表明：要使函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，其充要条件是：在这点函数的增量 Δy 与自变量的增量 Δx 同时趋于零．换句话讲：连续函数的特性就是对应于自变量的无穷小增量，函数的增

量也是无穷小．

3.3.2　函数的间断点

定义 3　如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，称点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点．

由定义 1 可知，如果 $f(x)$ 在点 x_0 处有下列三种情况之一，则点 x_0 是 $f(x)$ 的一个间断点．

（1）函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处没有定义；

（2）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

（3）在点 x_0 处有定义，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$．

按函数出现间断点的三种情形，常将间断点分成以下两类：

第一类间断点　设点 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个间断点，但左极限及右极限都存在，则称点 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点．

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则称 x_0 称为 $f(x)$ 的**跳跃间断点**．

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)= \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq f(x_0)$ 或在点 x_0 处无定义，则称 x_0 是 $f(x)$ 的**可去间断点**．

第二类间断点　如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在，则称点 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点．

例 6　函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处没有定义，所以 $x=1$ 是函数的间断点．

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$，所以 $x=1$ 是可去间断点．如果补充定义：令 $x=1$ 时，$y=2$，则函数在 $x=1$ 处连续．

例 7　设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$，如图 3-16 所示，$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点．因为

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} x=1,\quad f(1)=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$$

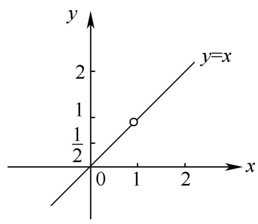

图 3-16

所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点．

如果改变函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的定义：令 $f(1)=1$，则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续．

例 8　设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$，$x=0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点．因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，即极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点．

例 9　正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处没有定义，所以点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是函数 $y=\tan x$ 的间断点，由

于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，所以 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为函数 $y=\tan x$ 的第二类间断点，因为其极限为无穷大，所以又称为**无穷间断点**.

例 10　函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处没有定义，所以点 $x=0$ 是函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 的间断点．且当 $x\to 0$ 时函数的左、右极限均不存在，故点 $x=0$ 是函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点．在 $x\to 0$ 的过程中，函数值在−1 与+1 之间无限振荡，如图 3-17 所示，所以又称点 $x=0$ 为函数的**振荡间断点**.

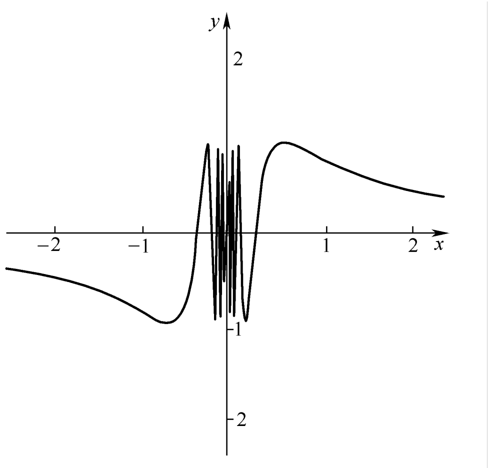

图 3-17

3.3.3　闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数具有一些重要性质，这里介绍几个定理，证明略去.

先说明最大值和最小值的概念．设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在 $x_0\in I$，使得对于任一 $x\in I$ 都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad (f(x)\geqslant f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值（最小值）.

观察闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的图形（见图 3-18），可以发现，无论函数的图形如何变化，均存在一个最大值和最小值，有如下定理：

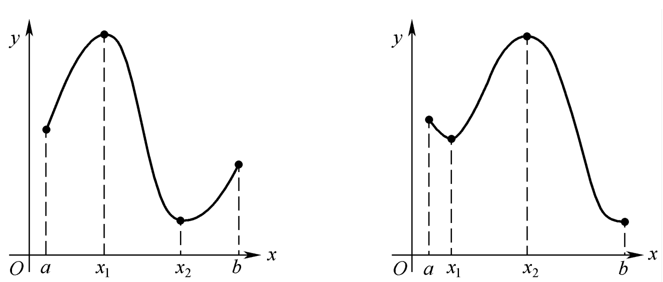

图 3-18

定理 1（最大值最小值定理） 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

定理 1 是充分条件，如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么至少有一点 $\xi_1 \in [a,b]$，使得 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，又至少有一点 $\xi_2 \in [a,b]$，使得 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

注意：如果函数在开区间内连续，或函数在闭区间上有间断点，那么函数在该区间上就不一定有最大值或最小值.

例如，在开区间 (a,b) 上考察函数 $y=x$，虽然函数是连续的，但是不存在最大值和最小值. 又例如，函数 $y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0 \leqslant x<1 \\ 1, & x=1 \\ -x+3, & 1<x \leqslant 2\end{cases}$ 在闭区间 $[0,2]$ 上无最大值和最小值，如图 3-19 所示.

由定理 1 容易得到下面的结论

定理 2（有界性定理） 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

定理 3（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，那么，对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C\ (a<\xi<b).$$

例如，在图 3-20 中，在闭区间 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=C$ 有三个交点 ξ_1,ξ_2,ξ_3，即

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=f(\xi_3)\quad(a<\xi_1,\xi_2,\xi_3<b)$$

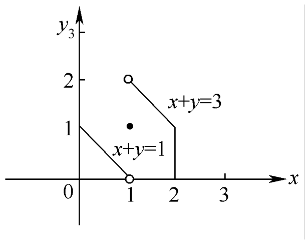

图 3-19

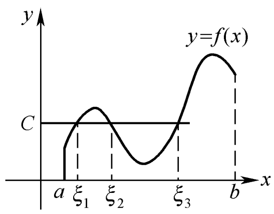

图 3-20

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

如果 $f(x_0)=0$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**零点**.

定理 4（零点定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$），那么在开区间 (a,b) 内函数 $f(x)$ 至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得 $f(\xi)=0$.

例如，在图 3-21 中，连续曲线 $y=f(x)$（$f(a)<0, f(b)>0$）与 x 轴相交于点 ξ 处，所以有 $f(\xi)=0$.

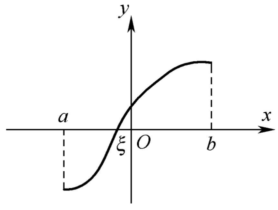

图 3-21

例 11 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证 函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，又 $f(0)=1>0$，$f(1)=-2<0$. 根据零

点定理，在$(0,1)$内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=0$，即$\xi^3-4\xi^2+1=0$，（$0<\xi<1$）．所以方程$x^3-4x^2+1=0$在区间$(0,1)$内至少有一个根．

3.3.4 初等函数的连续性

定理 5 基本初等函数在其定义域内是连续的．

定理 6 如果函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0处连续，则函数$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（当$g(x_0)\neq 0$时）在点x_0处也连续．

例如，$\sin x,\cos x$都在区间$(-\infty,+\infty)$内连续，故

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}，\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

在其定义域内也都连续．

定理 7 设函数$u=g(x)$在点x_0处连续，函数$y=f(u)$在点$u_0=g(x_0)$处连续，则复合函数$y=f[g(x)]$在点x_0处连续．

例 12 求$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$．

解 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$是由$y=\sqrt{u}$与$u=\dfrac{x-3}{x^2-9}$复合而成的．因为

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}$$

函数$y=\sqrt{u}$在点$u=\dfrac{1}{6}$连续，所以

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\frac{1}{6}}\,.$$

因为初等函数是由基本初等函数经过四则运算和复合构成的，根据定理 6 和定理 7 容易得到：**初等函数在其定义区间内都是连续的**．这样我们在求初等函数在其定义区间内某点的极限时，只需求初等函数在该点的函数值即可．

例 13 求$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}$．

解 初等函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$在点$x_0=0$有定义，所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1}=1\,.$$

例 14 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x$．

解 初等函数$f(x)=\ln\sin x$在点$x_0=\dfrac{\pi}{2}$有定义，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\ln\sin\frac{\pi}{2}=0\,.$$