

第3章 向量组的线性相关性

本章学习目标

本章主要介绍 n 维向量的概念；向量的线性组合与线性表示和向量组的线性相关性；向量组的秩、向量组的极大线性无关组及向量空间的概念，为进一步研究线性方程组的解奠定了非常重要的理论基础。通过本章的学习，重点掌握以下内容：

- n 维向量的概念及基本运算，向量的线性组合与线性表示的基本概念
- 向量组的线性相关性，并会判断其线性相关性
- 向量组的秩和向量组的极大线性无关组的概念，并会求其秩和极大线性无关组
- 向量空间的概念及向量空间的维数和基的概念，会判断向量空间，并会求其维数和基

3.1 n 维向量

3.1.1 n 维向量的定义

在空间解析几何中，三个有序数组 x, y, z 与空间的一点 P 一一对应，记为 $P(x, y, z)$ ，起点为坐标原点、终点为 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为向径，其坐标表示式为

$$\overrightarrow{OP} = xi + yj + zk,$$

即 $\overrightarrow{OP} = \{x, y, z\}$ (或 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$),

其中 i, j, k 分别为沿 x, y 和 z 轴方向的单位向量。这样三维空间中的向量与三个实数之间就建立了一一对应的关系，下面将三维空间中的向量推广到 n 维空间。

定义 1 由 n 数组成的有序数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，称为一个 n 维向量，记为 α ，即

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

其中 a_i 称为向量 α 的第 i ($i=1, 2, \dots, n$) 个分量 (或坐标)。

分量全为实数的向量称为实向量，分量为复数的向量称为复向量 (本章只讨论实向量)。

n 维向量可以写成一行 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，称为行向量，即 $1 \times n$ 行矩阵；也可

以写成一行 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, 称为列向量, 即 $n \times 1$ 列矩阵.

列向量通常用黑体小写字母 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 等表示, 行向量用其转置 $\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\beta}^T$ 等表示.

若没有指明是行向量还是列向量时, 则默认为是列向量 (同维数的行、列向量看成是不同的向量).

n 维向量是解析几何中向量的推广, 但当 $n > 3$ 时, 已没有直观的几何意义了, 只是沿用几何上的术语.

分量全为零的向量, 称为零向量, 记作 $\mathbf{0}$, 即

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T.$$

向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 的各分量的相反数所组成的向量, 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量, 记为 $-\boldsymbol{\alpha}$, 即

$$-\boldsymbol{\alpha} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)^T.$$

设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 若 $a_i = b_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等, 记为 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, 即 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 当且仅当 $a_i = b_i$ ($i=1, 2, \dots, n$).

同维数的行向量或列向量所组成的集合称为 (行或列) 向量组.

例如, 一个 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的每一行 $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ($i=1, 2, \dots, m$) 都是一个 n 维行向量, 由 A 的 m 个 n 维行向量

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^T, \boldsymbol{\alpha}_2^T, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m^T$ 称为矩阵 A 的行向量组; A 的每一列

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

($j=1, 2, \dots, n$) 都是一个 m 维列向量, 由 A 的 n 个 m 维列向量

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} (j=1, 2, \dots, n),$$

组成的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 称为矩阵 A 的列向量组.

由分块矩阵的概念, 可将 A 表示为

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix};$$

反之, 由有限个向量所组成的向量组可以构成一个矩阵. 例如, n 个 m 维列向量组成的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可以构成一个 $m \times n$ 矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = A$; m 个 n 维行向量组成的向量组 $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \dots, \alpha_m^T$ 也可以构成一个 $m \times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} = B,$$

由此可知, 矩阵与向量组之间是一一对应的.

3.1.2 n 维向量的线性运算

因为 n 维列向量是 $n \times 1$ 矩阵, n 维行向量是 $1 \times n$ 矩阵, 所以矩阵的加法和数乘运算及运算规律, 都适用于 n 维向量.

定义 2 设 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, k 为任意实数, 则两向量的加法 $\alpha + \beta$ 及数与向量的乘法 (数乘) $k\alpha$ 分别定义为

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)^T,$$

$$k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)^T.$$

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算, 其运算规律如下:

- (1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- (2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- (3) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$;
- (4) $\alpha + (-\alpha) = 0$;
- (5) $1 \cdot \alpha = \alpha$;
- (6) $(kl)\alpha = k(l\alpha)$;
- (7) $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

$$(8) \quad k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta.$$

其中 α, β, γ 都是 n 维向量, $k, l \in \mathbf{R}$.

例 1 设向量 $\alpha = (1, 0, 2, 3)^T$, $\beta = (-2, 1, -2, 0)^T$, 求满足 $\alpha + 2\beta - 3\gamma = 0$ 的向量 γ .

解 由 $\alpha + 2\beta - 3\gamma = 0$ 解出 γ , 即

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta) \\ &= \frac{1}{3}[(1, 0, 2, 3)^T + 2(-2, 1, -2, 0)^T] \\ &= \frac{1}{3}[(1, 0, 2, 3)^T + (-4, 2, -4, 0)^T] \\ &= (-1, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1)^T.\end{aligned}$$

3.2 向量组的线性相关性

3.2.1 向量组的线性组合

定义 3 设有 n 维向量 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 若存在一组数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m \quad \text{或} \quad \beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix},$$

则称 β 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合, 或称 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示 (表出), $k_1, k_2, \dots, k_m$ 称为此线性组合的组合系数.

例 2 设 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (2, 3, 1)^T$, $\alpha_3 = (3, 1, 2)^T$, $\beta = (0, 4, 2)^T$, 试问 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示? 若能, 写出具体表示式.

解 由 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$,

$$\text{即} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

由此得非齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ 2k_1 + 3k_2 + k_3 = 4, \\ 3k_1 + k_2 + 2k_3 = 2. \end{cases}$$

因为方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0,$$

由克拉默法则知, 方程组存在唯一解, 求其解为 $k_1=1, k_2=1, k_3=-1$,

所以

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3,$$

即 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

例 3 设 $\alpha = (2, -3, 0), \beta = (0, -1, 2), \gamma = (0, -7, -4)$. 试问 γ 能否由 α, β 线性表示?

解 由 $k_1\alpha^T + k_2\beta^T = \gamma^T$,

$$\text{即} \quad k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix},$$

由此得非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2k_1 = 0, & (1) \\ -3k_1 - k_2 = -7, & (2) \\ 2k_2 = -4. & (3) \end{cases}$$

由方程 (1) 得 $k_1=0$, 由方程 (3) 得 $k_2=-2$, 但 $k_1=0, k_2=-2$ 不满足方程 (2), 即方程组无解, 所以, γ 不能表示成 α, β 的线性组合.

由例 2、3 知, 若将非齐次线性方程组 $Ax = b$ 中的系数矩阵 A 看成是由列向量组成的向量组, 则方程组

$$Ax = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b,$$

等价于向量形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = b,$$

因此, 讨论向量 b 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 就等价于讨论非齐次线性方程组 $Ax = b$ 是否有解, 其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

3.2.2 向量组的线性相关与线性无关

向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 说明向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中有一个向量能由其余向量线性表示, 而向量组

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

中任一向量都不能由其他两个向量线性表示. 一个向量组中有没有某个向量能由其余向量线性表示, 是向量组的一种属性, 称为向量组的线性相关性.

定义 4 设有 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}, \quad (3.2.1)$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 否则称此向量组线性无关. 换言之, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 则 (3.2.1) 式成立当且仅当

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0.$$

由此定义可知:

- (1) 仅含一个零向量的向量组必线性相关. 因为, 对任何 $k \neq 0$, 都有 $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$;
- (2) 仅含一个非零向量 α 的向量组必线性无关. 因为, 要使 $k\alpha = \mathbf{0}$, 必有 $k = 0$;
- (3) 任何包含零向量在内的向量组必线性相关. 因为, 若 $\alpha_1 = \mathbf{0}$, 便有

$$1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \dots + 0 \cdot \alpha_m = \mathbf{0},$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

3.2.3 向量组线性相关的充分必要条件

定理 1 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($m \geq 2$) 线性相关的充分必要条件是: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

证明 充分性:

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中有一个向量, 不妨设 α_m 可由其余 $m-1$ 个向量线性表示, 即
存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$, 使得

$$\alpha_m = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_{m-1} \alpha_{m-1},$$

或

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_{m-1} \alpha_{m-1} + (-1)\alpha_m = \mathbf{0},$$

由于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, -1$ 这 m 个数不全为 0 (至少 $-1 \neq 0$), 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

必要性:

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

因 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 中至少有一个不为零, 不妨设 $k_1 \neq 0$, 则有

$$\alpha_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\alpha_2 + \left(-\frac{k_3}{k_1}\right)\alpha_3 + \dots + \left(-\frac{k_m}{k_1}\right)\alpha_m,$$

即 α_1 可由 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

特别地, 两个向量 α_1, α_2 线性相关 (即两向量平行) 的充分必要条件是 α_1, α_2 的对应分量成比例, 即 $\alpha_1 = \lambda \alpha_2$ 或 $\alpha_2 = \mu \alpha_1$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$) 中至少有一个成立, 其几何意义为 α_1, α_2 共线; 三个向量线性相关的几何意义是它们共面.

判断向量组

$$\alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})^T \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

的线性相关性可归结为齐次线性方程组

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m = \mathbf{0}, \quad (3.2.2)$$

即

$$Ax = \mathbf{0}$$

是否有非零解.

一般地, 判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关的基本方法和步骤为:

(1) 假设存在一组数 $x_1, x_2, \dots, x_m$, 使

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m = \mathbf{0};$$

(2) 利用向量的线性运算和向量相等的定义, 找出含未知数 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的齐次线性方程组;

(3) 判断齐次线性方程组有无非零解;

(4) 若齐次线性方程组有非零解, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关; 若只有零解, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

例 4 讨论向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

的线性相关性.

解法 1 设有一组数 x_1, x_2, x_3 , 使

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \mathbf{0},$$

即

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, & (2) \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. & (3) \end{cases} \quad (3.2.3)$$

由于方程 (1) 加方程 (3) 正好等于方程 (2), 所以 (2) 可以去掉, 得同解

方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

将(1)和(3)两个方程中的 x_3 移到方程的右边,得

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -3x_3, \\ x_1 + x_2 = x_3. \end{cases}$$

令 $x_3=1$, 求出 $x_1=-4$, $x_2=5$, 故方程组的一组解为 $x_1=-4$, $x_2=5$, $x_3=1$.

从而

$$-4\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 = \mathbf{0},$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

解法2 设有一组数 x_1, x_2, x_3 , 使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \mathbf{0},$$

则有方程组(3.2.3), 因其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

所以方程组(3.2.3)有非零解, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

例5 讨论 n 维向量组

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

的线性相关性, 通常称 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 为基本单位向量组.

解 设有一组数 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 使

$$k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + \dots + k_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0},$$

即

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + k_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

得 $(k_1, k_2, \dots, k_n)^T = \mathbf{0}$, 从而 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$,

故 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 线性无关.

如果所讨论的向量组是行向量组, 为了便于写出方程组, 也可以写成列向量的形式.

例6 讨论向量组

$$\alpha_1 = (2, 1, 0), \alpha_2 = (1, 2, 1), \alpha_3 = (0, 1, 2)$$

的线性相关性.

解 设有一组数 k_1, k_2, k_3 , 使

$$k_1 \alpha_1^T + k_2 \alpha_2^T + k_3 \alpha_3^T = \mathbf{0},$$

即

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

于是有

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 = 0, \\ k_1 + 2k_2 + k_3 = 0, \\ k_2 + 2k_3 = 0. \end{cases}$$

因为方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

所以方程组只有零解, 即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

例 7 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 讨论向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} + \alpha_n, \beta_n = \alpha_n + \alpha_1$ 的线性相关性.

解 设有一组数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使

$$x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + \dots + x_n \beta_n = \mathbf{0},$$

即

$$x_1(\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(\alpha_2 + \alpha_3) + \dots + x_n(\alpha_n + \alpha_1) = \mathbf{0},$$

从而有

$$(x_1 + x_n)\alpha_1 + (x_1 + x_2)\alpha_2 + \dots + (x_{n-1} + x_n)\alpha_n = \mathbf{0},$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 得齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_n = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 0, \end{cases}$$

将其系数行列式按第一行展开得

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1}.$$

当 n 为奇数时, $|A| = 2 \neq 0$, 因此 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \mathbf{0}$, 故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关;

当 n 为偶数时, $|A|=0$, 因此 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \neq \mathbf{0}$, 故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性相关.

例8 讨论下列向量组的线性相关性:

$$(1) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$(2) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 设有数 x_1, x_2, x_3 , 使

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \mathbf{0},$$

即有
$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

从而得齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

由前三个方程构成的方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 19 \neq 0,$$

齐次线性方程组只有零解, 所以, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(2) 设有数 x_1, x_2, x_3, x_4 , 使

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 + x_4 \alpha_4 = \mathbf{0},$$

即有

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

从而得齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & -5 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

系数矩阵 A 的行列式

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & -5 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2 + 2r_3]{r_1 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_2]{r_3 + 2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[r_4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)]{r_2 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 \times 27]{r_3 + 4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 27 & -27 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_3]{r_3 \times \frac{1}{27}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

该齐次线性方程组有非零解, 所以, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

3.3 线性相关性的判别定理

定理 2 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是 (3.2.2) 有非零解) 它所构成的矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 的秩小于向量个数 m ; 该向量组线性无关的充分必要条件是 $R(A) = m$.

推论 1 n 个 n 维向量线性无关的充分必要条件是它们所构成的方阵的行列式不等于零.

推论 2 m 个 n 维向量组成的向量组, 当维数 n 小于向量个数 m (即 $n < m$) 时一定线性相关.

证明 m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 构成的矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, 由于 $R(A) \leq n$, 当 $n < m$ 时, 有 $R(A) \leq n < m$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

特别地, $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

例 9 讨论下列向量组的线性相关性:

(1) $\alpha_1 = (1, 3)^T, \alpha_2 = (2, 9)^T, \alpha_3 = (0, -1)^T$;

$$(2) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 由于向量组所含向量的个数大于其维数, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关;

(2) 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 构成的矩阵施行初等行变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 6r_3]{r_2 + 3r_3 + r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + 13r_3]{\substack{r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_3 \times \frac{1}{6}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因为 $R(A) = 3$, 等于向量个数, 所以, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

定理 3 (1) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 则 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m$ 也线性相关;

(2) 线性无关的向量组的任何部分组必线性无关.

证明 (1) 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 所以存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_r$, 使

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r = \mathbf{0},$$

从而

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r + 0 \alpha_{r+1} + \dots + 0 \alpha_m = \mathbf{0},$$

由于 $k_1, k_2, \dots, k_r, 0, \dots, 0$ 这 m 个数不全为零, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

(2) 留给读者自行证明.

此定理 (1) 说明线性相关的向量组添加几个向量后所得的向量组仍线性相关 (部分相关 $\Rightarrow$ 整体相关); (2) 说明线性无关的向量组去掉几个向量后所得的向量组 (若还有剩余的向量) 仍线性无关 (整体无关 $\Rightarrow$ 部分无关).

例 10 讨论由向量 $\alpha = (1, 2, 2, 1)$, $\beta = (2, 4, 4, 2)$ 及 $\gamma = (0, 2, 4, 5)$ 所组成的向量组的线性相关性.

解 显然, $\alpha = \frac{1}{2}\beta$, 所以 α, β 线性相关, 由定理 2 (1) 知, α, β, γ 线性相关.

定理 4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 则 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 且表示式唯一.

证明 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 所以存在一组不全为零的数 $k_1, \dots, k_m, k_{m+1}$, 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + k_{m+1}\beta = \mathbf{0},$$

假设 $k_{m+1} = 0$, 则 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 不全为零, 且有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

这与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关矛盾, 所以 $k_{m+1} \neq 0$, 从而

$$\beta = -\frac{k_1}{k_{m+1}}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_{m+1}}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_{m+1}}\alpha_m,$$

即 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

再证表示式的唯一性.

设有两个表示式

$$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m \text{ 及 } \beta = \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \cdots + \mu_m\alpha_m,$$

两式相减, 得

$$(\lambda_1 - \mu_1)\alpha_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\alpha_2 + \cdots + (\lambda_m - \mu_m)\alpha_m = \mathbf{0},$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 所以

$$\lambda_i - \mu_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

即

$$\lambda_i = \mu_i \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

从而证明了表示式的唯一性.

定理 5 设有两个向量组

$$A: \alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^T \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

$$B: \beta_j = (a_{p_1j}, a_{p_2j}, \dots, a_{p_nj})^T \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是自然数 $1, 2, \dots, n$ 的某个确定的排列, 则向量组 A 与向量组 B 的线性相关性相同.

证明 向量组 A 线性相关的充分必要条件是方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0},$$

即

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

有非零解.

向量组 B 线性相关的充分必要条件是方程组

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_m\beta_m = \mathbf{0},$$

即

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{p_11} \\ a_{p_21} \\ \vdots \\ a_{p_n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{p_12} \\ a_{p_22} \\ \vdots \\ a_{p_n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_m \begin{pmatrix} a_{p_1m} \\ a_{p_2m} \\ \vdots \\ a_{p_nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

有非零解.

由于 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的某个确定的排列, 方程组(3.3.1)和(3.3.2)只是其中方程的次序不同而已, 所以这两个方程组是同解的. 因而若向量组 A 线性无关, 则向量组 B 也线性无关; 若向量组 A 线性相关, 则向量组 B 也线性相关.

定理 6 设有两个向量组

$$A: \alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{rj})^T \quad (j=1, 2, \cdots, m);$$

$$B: \beta_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{rj}, a_{(r+1)j})^T \quad (j=1, 2, \cdots, m),$$

即向量 α_j 加上一个分量得到向量 β_j . 若向量组 A 线性无关, 则向量组 B 也线性无关; 反之, 若向量组 B 线性相关, 则向量组 A 也线性相关.

证明 设向量组 B 线性相关, 则存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使

$$k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 + \cdots + k_m \beta_m = \mathbf{0},$$

即

$$k_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \\ a_{(r+1)1} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{r2} \\ a_{(r+1)2} \end{pmatrix} + \cdots + k_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{rm} \\ a_{(r+1)m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

取其前 r 个等式, 有

$$k_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{pmatrix} + \cdots + k_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{rm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

即

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_m \alpha_m = \mathbf{0},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为零, 从而证得向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

由定理 6 的证明过程知, α_j 添上 k 个分量后得到向量 β_j , 结论仍然成立. 又由定理 5 可知, 添上的 k 个分量可放在任何位置上. 所以, 很容易由低维数的线性无关向量组, 得到高维数的线性无关向量组.

例如, 由 $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ 线性无关, 可知向量组

$\alpha_1 = (1, 0, 0, 3, 2, -1, 5), \alpha_2 = (0, 1, 0, -1, -2, 1, 3), \alpha_3 = (0, 0, 1, 3, 2, 1, 2)$ 也线性无关.

3.4 向量组的秩

3.4.1 向量组等价的概念

定义 5 设两个向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 和 B: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$.

若向量组 A 中的每个向量都可由向量组 B 线性表示, 则称向量组 A 可由向量

组 B 线性表示; 若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示, 则称这两个向量组等价.

设向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 即

$$\begin{cases} \alpha_1 = k_{11}\beta_1 + k_{21}\beta_2 + \cdots + k_{s1}\beta_s, \\ \alpha_2 = k_{12}\beta_1 + k_{22}\beta_2 + \cdots + k_{s2}\beta_s, \\ \vdots \\ \alpha_r = k_{1r}\beta_1 + k_{2r}\beta_2 + \cdots + k_{sr}\beta_s. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

由矩阵乘法, 有

$$\alpha_i = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) \begin{pmatrix} k_{1i} \\ k_{2i} \\ \vdots \\ k_{si} \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, \cdots, r),$$

于是(3.4.1)式可表示为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix}. \quad (3.4.2)$$

设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$, $K = (k_{ij})_{s \times r}$, 则可将(3.4.2)

式写成矩阵形式

$$A = BK, \quad (3.4.3)$$

可见向量组 A 由向量组 B 线性表示可简记为(3.4.3)所示的矩阵形式; 反之若有(3.4.3)的矩阵形式, 则可将矩阵 A 的列向量看作是矩阵 B 的列向量的线性表示.

等价向量组具有下面三个性质:

- (1) 自反性: 向量组 A 与自身等价;
- (2) 对称性: 若向量组 A 与向量组 B 等价, 则向量组 B 与向量组 A 等价;
- (3) 传递性: 若向量组 A 与向量组 B 等价, 向量组 B 与向量组 C 等价, 则向量组 A 与向量组 C 等价.

在数学中, 把具有上述三个性质的关系称为等价关系.

3.4.2 极大线性无关组与向量组的秩

定义 6 设向量组 A 的一个部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 满足

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;
- (2) 向量组 A 中每一个向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示,

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 A 的一个极大线性无关组, 简称极大无关组; 极大线性无关组所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩记为 $R(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$.

由定义6可证明:

- (1) 只含零向量的向量组没有极大线性无关组, 规定它的秩为0;
- (2) 任何非零向量组必存在极大无关组;
- (3) 向量组的极大无关组与向量组本身等价;
- (4) 线性无关向量组的极大无关组为其本身(线性无关向量组的秩等于它所含向量的个数).

例11 求向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

的一个极大无关组.

解 由例4知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 下面讨论其中任意两个向量 α_1, α_3 的线性相关性.

设有数 k_1, k_2 , 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_3 = \mathbf{0}$, 即

$$\begin{cases} 2k_1 + 3k_2 = 0, \\ 3k_1 + 2k_2 = 0, \\ k_1 - k_2 = 0. \end{cases}$$

因为由前两个方程构成的齐次线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故方程组有唯一解, 即 $k_1 = k_2 = 0$, 所以 α_1, α_3 线性无关.

同理可验证 α_1, α_2 ; α_2, α_3 也线性无关. 可取 α_1, α_3 作为原向量组的一个极大无关组, 也可取 α_1, α_2 或 α_2, α_3 作为原向量组的极大无关组.

一般来说, 向量组的极大无关组不是唯一的, 但可以证明每一个极大无关组所含向量的个数是唯一的. 求向量组的极大无关组的意义之一在于: 当用向量组表示方程组时, 其极大无关组中的向量对应方程组中那些独立的方程, 而独立的方程构成的方程组与原方程组同解.

当一个向量组线性相关时, 其对应的方程组中一定有某个方程是其余方程的线性组合, 这个方程就是多余方程, 此时称方程组(各个方程)是线性相关的; 当方程组中没有多余方程, 则称该方程组(各个方程)是线性无关(或线性独立)的.

例12 由全体 n 维向量构成的向量组记为 R^n , 求 R^n 的一个极大无关组及其秩.

解 由本章例5知, n 维单位向量组 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)^T$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)^T$ 线性无关, 由定理2的推论2知, R^n 中的任意 $n+1$ 个向量(任意

向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$ 都线性相关. 因此, 向量组 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 是 R^n 的一个极大线性无关组, 且 R^n 的秩等于 n .

显然, R^n 的极大无关组很多, 任意 n 个线性无关的 n 维向量构成的向量组都是 R^n 的极大无关组.

定理 7 若向量组 A 的秩为 r , 向量组 B 的秩为 s , 且向量组 A 能由向量组 B 线性表示, 则 $r \leq s$.

证明 设向量组 A 的极大线性无关组为

$$A_0: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r;$$

向量组 B 的极大线性无关组为

$$B_0: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s.$$

因为向量组 A_0 能由向量组 A 线性表示 (A_0 与 A 等价), 向量组 A 可由向量组 B 线性表示 (定理中条件), 向量组 B 能由向量组 B_0 线性表示 (B_0 与 B 等价), 故向量组 A_0 能由向量组 B_0 线性表示 (传递性), 即存在矩阵 $K = (k_{ij})_{s \times r}$, 使

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{pmatrix},$$

假设 $r > s$, 则 $R(K) \leq s < r$, 即方程组

$$K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

有非零解. 设它的一组非零解为

$$x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \dots, x_r = \lambda_r,$$

则

$$\begin{aligned} \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_r \alpha_r &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} \\ &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) K \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \mathbf{0} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

这与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关矛盾, 从而有 $r \leq s$.

推论 等价向量组的秩相等.

证明 设向量组 A 与向量组 B 的秩分别为 r 和 s , 由于向量组 A 和向量组 B 等价, 即这两个向量组可以互相线性表示, 由定理 7 知 $r \leq s$ 与 $s \leq r$ 同时成立, 所以 $r = s$.

特别地, 等价的线性无关向量组所含向量个数相等.

由于一个向量组的不同极大无关组之间等价, 因而它们所含向量个数均相等, 由此也证明了一个向量组的秩是唯一的.

3.4.3 向量组的秩与矩阵秩的关系

设 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称矩阵 A 的 n 个列向量所构成的向量组的秩为 A 的**列秩**; A 的 m 个行向量所构成的向量组的秩为 A 的**行秩**.

矩阵的秩与其行、列秩的关系有如下定理:

定理 8 矩阵 A 的秩等于其行秩, 也等于其列秩.

证明 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $R(A) = r$, 并设 r 阶子式 $D_r \neq 0$, 根据定理 2, D_r 所在的 r 列线性无关; 又由 A 中所有 $r+1$ 阶子式均为零, 则 A 中任意 $r+1$ 个列向量线性相关.

因此, D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个极大无关组, 所以列向量组的秩等于 r .

类似可证矩阵 A 的行向量组的秩也等于 $R(A)$, 即

$$R(A) = A \text{ 的行向量组的秩} = A \text{ 的列向量组的秩}.$$

以上证明给出了一种求向量组的极大无关组的方法: 将所给的向量组按列(行)构成矩阵 A , 若 D_r 是矩阵 A 的一个最高阶非零子式, 则 D_r 所在的 r 列(行)就是 A 的列(行)向量组的一个极大无关组.

3.4.4 初等变换求向量组的秩

由定理 8 知, 求一个向量组的秩, 可以转化为求以这个向量组为行向量或列向量构成的矩阵的秩, 而矩阵的秩很容易通过初等变换求得, 因此也可以用初等变换求向量组的秩.

将所讨论的 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 写成一个 n 行 m 列的矩阵, 并对此矩阵施行初等行变换, 化为行阶梯形矩阵, 其非零行的行数就是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的秩(即极大无关组所含向量的个数).

例 13 求向量组 $\alpha_1 = (1, 4, 1, 0, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 5, -1, -3, 2)^T$, $\alpha_3 = (-1, 2, 5, 6, 2)^T$, $\alpha_4 = (0, 2, 2, -1, 0)^T$ 的秩.

解 将向量按列构成矩阵 A , 用初等行变换化其为行阶梯形矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

显然, 非零行数为 3, 知 $R(A) = 3$,

故

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3.$$

求向量组的极大无关组时, 如果所给的是行向量组, 一般也按列排成矩阵再做初等行变换.

例 14 求向量组

$\alpha_1 = (2, 1, 4, 3)$, $\alpha_2 = (-1, 1, -6, 6)$, $\alpha_3 = (-1, -2, 2, -9)$, $\alpha_4 = (1, 1, -2, 7)$, $\alpha_5 = (2, 4, 4, 9)$ 的一个极大无关组.

解 将向量组按列排成矩阵 A , 用初等行变换化 A 为行阶梯形矩阵 B :

$$\begin{aligned} A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ \frac{1}{2}r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}r_2, r_3 + 5r_2 \\ r_4 - 3r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}r_3 \\ r_4 - r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B, \end{aligned}$$

由于 B 的 1, 2, 4 列线性无关, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大无关组.

如果要求将其余的向量用所求的极大无关组线性表示, 需将矩阵化为行最简形矩阵, 否则只需将矩阵化为行阶梯形矩阵.

例 15 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T$, $\alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)^T$, $\alpha_3 = (3, 2, -1, a+2)^T$, $\alpha_4 = (-2, -6, 10, a)^T$, 当 a 取何值时, 该向量组线性无关, 并在此时将向量

$\alpha = (4, 1, 6, 10)^T$ 用这个向量组线性表示.

解 将矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha)$ 施行初等行变换, 化其为行最简形矩阵

$$\begin{aligned}
 A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & a+2 & a & 10 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & 1-a \end{pmatrix} = B \\
 &\xrightarrow{\substack{r_4 \div (a-2) \\ r_1+2r_4 \\ r_2+4r_4 \\ r_3-3r_4 \\ r_2 \div (-2) \\ r_1+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3a-4}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1-a}{a-2} \end{pmatrix} \quad (a \neq 2),
 \end{aligned}$$

当 $a \neq 2$ 时, 由矩阵 B 可知, 前 4 列线性无关, 相应地 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 由最后的行最简形矩阵可知

$$\alpha = 2\alpha_1 + \frac{3a-4}{a-2}\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{1-a}{a-2}\alpha_4.$$

例 16 用矩阵的秩与向量组的秩的关系证明

$$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}.$$

证明 设 A, B 分别为 $m \times n$ 矩阵和 $n \times s$ 矩阵, $AB = C$, 则 C 是 $m \times s$ 矩阵, 先证 $R(AB) \leq R(A)$.

将 A 和 C 看成是列向量构成的矩阵, 设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad C = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s),$$

则

$$(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix},$$

则 C 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示. 由定理 7 得

$$R(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s) \leq R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

即

$$R(AB) \leq R(A),$$

因 $C^T = B^T A^T$, 由上面的证明知 $R(C^T) \leq R(B^T)$, 所以 $R(AB) \leq R(B)$,

故 $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

此题结论与定理 7 是同一个原理的不同表现形式, 前者是矩阵形式, 后者是向量组的形式, 所以此题结论也可以看成是定理 7 的推论.

类似地, 可证明两矩阵和的秩小于等于两矩阵秩的和, 即 $R(A+B) \leq R(A) + R(B)$.

3.5 向量空间

为了研究线性方程组解的结构, 本节介绍向量空间的概念.

3.5.1 向量空间的概念

定义 7 设 V 是非空的 n 维向量集合, 若集合 V 对于向量的加法和数乘运算满足:

(1) 对任意的 $\alpha, \beta \in V$, 有 $\alpha + \beta \in V$;

(2) 对任意的 $\alpha \in V, \lambda \in \mathbf{R}$, 有 $\lambda\alpha \in V$,

则称集合 V 为向量空间.

定义中的 (1) 表示集合 V 中向量对于加法运算封闭; (2) 表示集合 V 中向量对于数乘运算封闭. 因而向量空间也可以表述为: 对加法和数乘运算封闭的非空集合.

例 17 设有三维向量的全体

$$R^3 = \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$$

以及三维向量集合

$$V_1 = \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\},$$

$$V_2 = \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\},$$

其中 R^3 、 V_1 是向量空间, 而 V_2 不是向量空间. 因为, 对任意的 $\alpha, \beta \in R^3$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 有

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

从而

$$\alpha + \beta = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in R^3, \quad \lambda\alpha = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \in R^3,$$

又对任意的 $\alpha, \beta \in V_1$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 有

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

而

$$\alpha + \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in V_1, \quad \lambda\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \in V_1,$$

但是对任意的 $\alpha, \beta \in V_2$, $\lambda \in \mathbf{R}$, 有

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

而

$$\alpha + \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \notin V_2, \quad \lambda\alpha = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \notin V_2,$$

即 R^3 、 V_1 中的向量对于加法与数乘运算封闭, 但 V_2 中的向量对于向量的加法和数乘运算不封闭.

在解析几何中, 向量空间 R^3 可形象地看作以坐标原点为起点的空间有向线段的全体; 而向量空间 V_1 可形象地看作以坐标原点为起点, 落在平面 x_2Ox_3 上的空间有向线段的全体.

类似地, n 维向量全体所构成的集合 $R^n = \{\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ 是一个向量空间, 称为 n 维向量空间.

例 18 设 α, β 是 n 维向量, 集合 $V = \{x = \lambda\alpha + \mu\beta \mid \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$ 是一个向量空间. 因为零向量 $0 = 0\alpha + 0\beta \in V$, V 是非空集合; 且对任意的 $x_1, x_2 \in V$, $k \in \mathbf{R}$, 有

$$x_1 = \lambda_1\alpha + \mu_1\beta, \quad x_2 = \lambda_2\alpha + \mu_2\beta,$$

从而

$$x_1 + x_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha + (\mu_1 + \mu_2)\beta \in V,$$

$$kx_1 = (k\lambda_1)\alpha + (k\mu_1)\beta \in V,$$

称此向量空间为由向量 α, β 生成的向量空间, 记为 $V(\alpha, \beta)$.

一般地, 由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 生成的向量空间可表示为

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \{\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}\}.$$

3.5.2 向量空间的基与维数

除零空间外, 向量空间都含有无穷多个向量, 而这无穷多个向量能否用有限个向量来表示是值得讨论的.

例如, 在 R^3 中, 取 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T, \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T, \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$, 对任意的 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3$ 都可表示为 $\alpha = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$, 此时称 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 为 R^3 的基. 一般地, 有

定义 8 设 V 是向量空间, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in V$, 满足

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;
- (2) V 中的任一向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示,

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一个基, r 称为 V 的维数, 记为 $\dim V = r$, 并称 V 是 r 维向量空间.

只含一个零向量的集合 $\{0\}$ 也是一个向量空间, 称为零空间, 零空间没有基, 规定它的维数为 0, 所以也可称为 0 维向量空间.

如果将向量空间看作一个向量组, 那么向量空间 V 的基就是它的一个极大无关组. V 的维数就是它的秩, 从而向量空间 V 的基不唯一, 但其维数是唯一的. 设 V 是 r 维向量空间, 则 V 中任意 r 个线性无关的向量就是 V 的一个基.

例如, 在 R^n 中, n 维基本单位向量组

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)^T$ 是向量空间 R^n 的一个基. 因为 (1) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 线性无关; (2) 任一向量 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, 有

$$\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n,$$

故 $\dim R^n = n$, 即 R^n 是 n 维向量空间. 实际上, R^n 中任意线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 都是向量空间 R^n 的基.

又例如, 基本单位向量组

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T, \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$$

是向量空间 V_1 的一个基. 因为 (1) $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 线性无关; (2) 对任意的向量 $\alpha \in V_1$, 有

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3,$$

所以, V_1 是二维向量空间.

因此, 通常定义的 n 维向量与本节定义的 n 维向量空间是两个完全不同的概念, 前者是指向量的分量个数为 n ; 后者是指向量空间的基所含向量个数为 n .

若将向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 生成的向量空间 $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 也看成向量组, 则它与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 等价, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的一个极大无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ($r \leq m$)

就是向量空间 $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 的一个基, 从而 $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 是 r 维向量空间, 所以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 生成的向量空间还可简单地表示为

$$V = \{\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_r \alpha_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbf{R}\}.$$

例 19 证明 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 3, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 0, 1, 0)^T, \alpha_4 = (1, 0, 0, 1)^T$ 是 R^4 的一个基.

证明 由定义 8 及定理 2 的推论 1 知, 只要证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关即可.

将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 写成矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 则

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

由定理 2 的推论 1 知, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 R^4 的一个基.

本章小结

本章重点讨论了向量组的线性表示、向量组的线性相关性、向量组的秩以及向量组的极大无关组等, 除了掌握一些判定定理外, 还要掌握一些常用方法和技巧.

一、线性表示

向量 β 能用向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 与矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta)$ 的秩相等, 而表示式唯一 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关或 $R(A) = m$.

具体方法: 用待定系数法将 β 设为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合, 列出方程组, 解出待定系数, 若无解, 则不能线性表示.

相关结论:

1. 零向量是任何一组向量的线性组合.
2. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的任一向量 $\alpha_j (1 \leq j \leq m)$ 都是此向量组的线性组合.
3. 任何一个 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 都是 n 维基本单位向量组 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)^T$ 的线性组合, 且 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$.

二、判断向量组的线性相关性的主要方法有:

1. 定义法: 假设有数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$$

成立, 由向量相等, 列出齐次线性方程组, 判断其是否存在非零解. 若存在非零解, 则向量组线性相关, 若不存在非零解, 则向量组线性无关.

2. 反证法: 此法是讨论向量组线性相关性的重要方法.

3. 综合法: 可以结合矩阵的秩进行讨论, 特别是当向量的个数与维数相等时, 可根据行列式的值进行判断; 利用向量组的等价性进行讨论.

三、向量组的等价性

1. 任一向量组和它的极大无关组等价.

2. 向量组的任意两个极大无关组等价.

3. 两个等价的线性无关的向量组所含向量的个数相同.

4. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的任意两个极大无关组含向量的个数相同.

四、求向量组的秩和极大无关组的基本方法:

1. 将向量组的秩, 转化为矩阵的秩进行讨论: 将向量组写成矩阵形式, 对其施行初等行变换化为行阶梯形矩阵, 其非零行的行数即为向量组的秩, 非零行对应的向量便组成一个极大无关组; 若将行阶梯形矩阵再施行初等行变换化为行最简形矩阵, 就可将其他向量用极大无关组线性表出.

2. 利用等价向量组具有相同的秩进行讨论.

习题 3

1. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (3, 4, 0)^T$, 求 $\alpha_1 - \alpha_2$ 及 $3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$.

2. 设 $3(\alpha_1 - \alpha) + 2(\alpha_2 + \alpha) = 5(\alpha_3 + \alpha)$, 其中

$$\alpha_1 = (2, 5, 1, 3)^T, \alpha_2 = (10, 1, 5, 10)^T, \alpha_3 = (4, 1, -1, 1)^T, \text{ 求 } \alpha.$$

3. 举例说明下列各命题是错误的:

(1) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是线性相关的, 则 α_1 可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示.

(2) 若有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 使

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m + \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_m \beta_m = 0,$$

成立, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 亦线性相关.

(3) 若只有当 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 全为零时, 等式

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m + \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_m \beta_m = 0,$$

才能成立, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 亦线性无关.

(4) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 亦线性相关, 则有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 使

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_m \alpha_m = 0 \text{ 与 } \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_m \beta_m = 0$$

同时成立.

4. 设 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 + \alpha_1$, 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性相关.

5. 设 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \beta_r = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$, 且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关.

6. (1) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1), \alpha_2 = (2, 0, k, 0), \alpha_3 = (0, -4, 5, -2)$ 的秩为 2, 求 k 的值;

(2) 已知 $\alpha_1 = (1, 0, 1, 2), \alpha_2 = (0, 1, 1, 2), \alpha_3 = (-1, 1, 0, a), \alpha_4 = (1, 2, a, 6), \alpha_5 = (1, 1, 2, 4)$, a 取何值时, 向量组的秩为 3, 求其极大线性无关组并用它表示其余向量.

7. 利用初等变换求下列矩阵的列向量组的一个极大无关组:

$$(1) \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. 求下列向量组的秩, 并求一个极大无关组:

$$(1) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 100 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$(2) \alpha_1^T = (1, 2, 1, 3), \alpha_2^T = (4, -1, -5, -6), \alpha_3^T = (1, -3, -4, -7).$$

9. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是一组 n 维向量, 已知 n 维基本单位向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 能由它们线性表示, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

10. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是一组 n 维向量, 证明它们线性无关的充分必要条件是: 任一 n 维向量都可由它们线性表示.

11. 设向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r_1 , 向量组 B: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 的秩为 r_2 , 向量组 C: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 的秩为 r_3 , 证明

$$\max\{r_1, r_2\} \leq r_3 \leq r_1 + r_2.$$

12. 设向量组 B: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 能由向量组 A: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)K,$$

其中 K 为 $s \times r$ 矩阵, 且 A 组线性无关的充分必要条件是矩阵 K 的秩 $R(K) = r$.

13. 设 $V_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R} \text{ 满足 } x_1 + \dots + x_n = 0\}$,

$$V_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R} \text{ 满足 } x_1 + \dots + x_n = 1\},$$

问 V_1, V_2 是不是向量空间? 为什么?

14. 试证: 由 $\alpha_1 = (0, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, 0)^T$ 所生成的向量空间就是 R^3 .

15. 由 $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1, 1)^T$ 所生成的向量空间记为 V_1 , 由 $\beta_1 = (2, -1, 3, 3)^T, \beta_2 = (0, 1, -1, -1)^T$ 所生成的向量空间记为 V_2 , 试证 $V_1 = V_2$.

16. 验证 $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \alpha_2 = (2, 1, 3)^T, \alpha_3 = (3, 1, 2)^T$ 为 R^3 的一个基, 并将 $\beta_1 = (5, 0, 7)^T, \beta_2 = (-9, -8, -13)^T$ 用这个基线性表示.

第3章同步测试题

一、填空题

1. 设 $\alpha_1 = (2, -1, 0, 5)$, $\alpha_2 = (-4, -2, 3, 0)$, $\alpha_3 = (-1, 0, 1, k)$, $\alpha_4 = (-1, 0, 2, 1)$, 则 $k =$ _____ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.
2. 设 $\alpha_1 = (2, -1, 3, 0)$, $\alpha_2 = (1, 2, 0, -2)$, $\alpha_3 = (0, -5, 3, 4)$, $\alpha_4 = (-1, 3, t, 0)$, 则 $t =$ _____ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.
3. 已知 $\alpha = (3, 5, 7, 9)$, $\beta = (-1, 5, 2, 0)$, x 满足 $2\alpha + 3x = \beta$, 则 $x =$ _____.
4. 当 $k =$ _____ 时, 向量 $\beta = (1, k, 5)$ 能由向量 $\alpha_1 = (1, -3, 2)$, $\alpha_2 = (2, -1, 1)$ 线性表示.
5. 已知 $\alpha_1 = (1, 1, 2, 2, 1)$, $\alpha_2 = (0, 2, 1, 5, -1)$, $\alpha_3 = (2, 0, 3, -1, 3)$, $\alpha_4 = (1, 1, 0, 4, -1)$, 则 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) =$ _____.
6. 设 $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $R(A) =$ _____.
7. 设 $\alpha = (1, 0, -1, 2)^T$, $\beta = (0, 1, 0, 2)$, 矩阵 $A = \alpha\beta$, 则 $R(A) =$ _____.
8. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\alpha_2 = (2, 3, 4, 5)$, $\alpha_3 = (3, 4, 5, 6)$, $\alpha_4 = (4, 5, 6, t)$, 且 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$, 则 $t =$ _____.
9. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性 _____.
10. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (a, 0, b)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, 2)^T$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 则 a, b 满足关系式 _____.

二、单选题

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ().
 A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ B. $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
 C. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ D. $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$
2. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩不为零的充分必要条件是 ().
 A. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中至少有一个非零向量
 B. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 全为非零向量
 C. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的任一部分组均线性相关
 D. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

3. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分条件是 ().
- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均不是零向量
 - $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都不成比例
 - $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的任一部分组均线性相关
 - $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任一部分组线性无关
4. 设矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩为 $R(A) = m < n$, E_m 为 m 阶单位矩阵, 下列结论中正确的是 ().
- A 任意 m 个列向量必线性无关
 - A 的任意一个 m 阶子式不等于零
 - 若矩阵 B 满足 $BA = O$, 则 $B = O$
 - A 通过初等行变换, 必可以化为 (E_m, O) 的形式
5. 设 A, B 都是 n 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 A 和 B 的秩 ().
- 必有一个等于零
 - 都小于 n
 - 一个小于 n , 一个等于 n
 - 都等于 n
6. $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ 线性相关, $\beta, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 ().
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关
 - $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关
 - α_1 可以用 $\beta, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示
 - β 可用 α_1, α_2 线性表示
7. 设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)$, $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)$, $\alpha_4 = (1, -2, 2, 0)$, $\alpha_5 = (2, 1, 5, 10)$, 则该向量组的极大无关组是 ().
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
 - $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$
 - $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$
 - $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$
8. 设 n 阶方阵 A 的秩 $r < n$, 则在 A 的 n 个行向量中 ().
- 必有 r 个行向量线性无关
 - 任意 r 个行向量均可构成极大无关组
 - 任意 r 个行向量均线性无关
 - 任一个行向量均可由其余 $r-1$ 个行向量线性表示
9. 设向量 α 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但不能由向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 记向量组 (II) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha$, 则 ().
- α_m 不能由 (I) 线性表示, 也不能由 (II) 线性表示
 - α_m 不能由 (I) 线性表示, 但能由 (II) 线性表示
 - α_m 可由 (I) 线性表示, 也可由 (II) 线性表示
 - α_m 可由 (I) 线性表示, 但不能由 (II) 线性表示
10. 设 $\alpha_1 = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\alpha_2 = (b_1, b_2, b_3)^T$, $\alpha_3 = (c_1, c_2, c_3)^T$, 则三直线

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$$

(其中 $a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i=1, 2, 3$) 交于一点的充要条件是 ().

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关
- B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关
- C. $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R(\alpha_1, \alpha_2)$
- D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关; α_1, α_2 线性无关

三、计算证明题

1. 设 $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 3, 5)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, a+2, 1)^T$, $\alpha_4 = (1, 2, 4, a+8)^T$, $\beta = (1, 1, b+3, 5)^T$.

(1) a, b 为何值时, β 不能表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合;

(2) a, b 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示, 且表示式唯一, 写出表示式.

2. 已知向量组 $\alpha_1 = (t, 2, 1)$, $\alpha_2 = (2, t, 0)$, $\alpha_3 = (1, -1, 1)$, 试求 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关或线性无关.

3. 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 问常数 a, b, c 满足什么条件时, $a\alpha_1 - \alpha_2, b\alpha_2 - \alpha_3, c\alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关.

4. 设 A 是 $n \times m$ 矩阵, B 是 $m \times n$ 矩阵, 其中 $n < m$, E 是 n 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 证明 B 的列向量组线性无关.

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 都是 n 维向量, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 但 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ 线性表示, 证明: α_r 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \beta$ 线性表示.

6. 设向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 2, 0)^T$, $\alpha_2 = (7, 0, 14, 3)^T$, $\alpha_3 = (2, -1, 0, 1)^T$, $\alpha_4 = (5, 1, 6, 2)^T$, $\alpha_5 = (2, -1, 4, 1)^T$.

(1) 求向量组的秩;

(2) 求此向量组的一个极大线性无关组, 并将其余向量分别用该极大线性无关组线性表示.