

第 3 章 微分中值定理与导数的应用

本章学习目标

- 了解罗尔定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理
- 会用洛必达法则求未定式的极限
- 掌握函数单调性、极值、曲线凹凸性与拐点的判断方法
- 掌握求函数最值的方法
- 掌握导数在经济中的应用

3.1 微分中值定理

3.1.1 罗尔定理

定理 3.1.1 设函数 $y = f(x)$ 满足下列条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) $f(a) = f(b)$.

则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$.

在此先给出几何解释: 如图 3.1 所示, 因 $f(a) = f(b)$, 所以弦 $\overline{AB}$ 平行于 x 轴, 其斜率为零, 故此时在从 A 到 B 这段曲线弧上至少有一点 $M(\xi, f(\xi))$, 使得过 M 点的切线平行于 x 轴, 即有 $f'(\xi) = 0$.

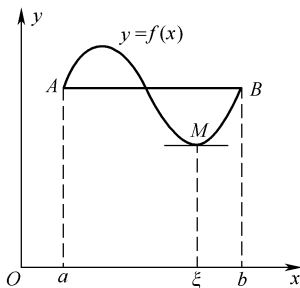


图 3.1

证明 由于函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 故由闭区间上连续函数的性质可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m .

(1) 若 $M = m$, 则在 (a, b) 内, $f(x)$ 为常值函数, 于是 $f'(x) \equiv 0$, $x \in (a, b)$. 故在 (a, b) 内的每一点都可取为 ξ , 且 $f'(\xi) = 0$, 定理成立.

(2) 若 $M \neq m$, 因为 $f(a) = f(b)$, 则 M 、 m 中至少有一个在 (a, b) 内部取得.

不妨设最大值 M 在点 $\xi \in (a, b)$ 取得, 即 $M = f(\xi) \geq f(x)$, $x \in [a, b]$, 由极限的保号性质有

$$f'_-(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0$$

$$f'_+(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0$$

而由已知 $f'(\xi)$ 存在, 故 $f'_-(\xi) = f'_+(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = 0$. 定理得证.

注意: 罗尔定理表明, 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上满足罗尔定理的条件, 则方程 $f'(x) = 0$ 在开区间 (a, b) 内至少有一个根. 因此罗尔定理常用来判别函数 $f'(x)$ 的零点 (注意 $f'(x)$ 未必连续, 这与连续函数零点存在定理是有区别的).

例 3.1.1 证明方程 $\sin x + x \cos x = 0$ 在 $(0, \pi)$ 内必有实根.

证明 由于 $\sin x + x \cos x$ 是 $x \sin x$ 的导函数, 因此我们考虑函数

$$F(x) = x \sin x, \quad x \in [0, \pi]$$

易知 $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 在 $(0, \pi)$ 内可导, 且 $F(0) = F(\pi) = 0$, 因此由罗尔定理可知, 存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得 $F'(\xi) = \sin \xi + \xi \cos \xi = 0$. 从而说明方程 $\sin x + x \cos x = 0$ 在 $(0, \pi)$ 内必有实根. 证毕.

例 3.1.2 证明方程 $x^3 + x + c = 0$ 至多有一个实根 (c 为任意常数).

证明 用反证法证明. 设方程有两个实根 α, β , 且 $\alpha < \beta$, 则 $f(x) = x^3 + x + c$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上满足罗尔定理的条件, 故至少存在一点 $\xi \in (\alpha, \beta)$ 使 $f'(\xi) = 0$, 而 $f'(\xi) = 3\xi^2 + 1$, 显然 $f'(\xi) \neq 0$, 矛盾. 故假设不成立, 即原方程不可能有两个不同的实根. 另外, 也不难看出原方程不可能有重实根.

例 3.1.3 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) + \frac{f(\xi)}{\xi} = 0$.

证明 需证结果可改写为 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = [xf(x)]' \Big|_{x=\xi} = 0$.

故可设函数 $F(x) = xf(x)$, 它在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $F(0) = F(1) = 0$, 满足罗尔定理的条件, 故至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$ 使

$$F'(\xi) = \xi f'(\xi) + f(\xi) = 0,$$

即在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) + \frac{f(\xi)}{\xi} = 0$. 证毕.

3.1.2 拉格朗日中值定理

定理 3.1.2 设函数 $y = f(x)$ 满足下列条件

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导.

则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (3.1.1)$$

对这个定理, 我们先从几何直观上加以说明. 如图 3.2 所示, 定理中的条件“函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导”规定了曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不间断, 在 (a, b) 内各点处都存在不垂直于 x 轴的切线, 从图 3.2 中可以看出, 在从 A 至 B 这段曲线弧上至少有一点 $M(\xi, f(\xi))$, 使得过 M 点的切线 MT 与弦 $\overline{AB}$ 平行. 而弦 $\overline{AB}$ 的斜率为

$$K_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

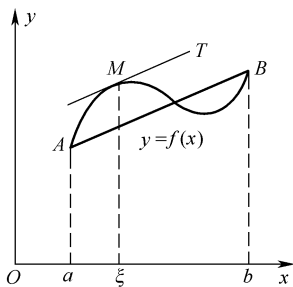


图 3.2

由导数的几何意义, 切线 MT 的斜率为

$$K_{MT} = f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

证明 作辅助函数 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$,

则 (1) $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) $F(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导;

(3) $F(a) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a} = F(b)$.

即 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理的条件, 故在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

即 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. 定理得证.

公式 (3.1.1) 称为拉格朗日中值公式, 无论 $a < b$ 还是 $b < a$ 均成立, 这个公式也可以写成

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad (\xi \text{ 在 } a \text{ 与 } b \text{ 之间}) \quad (3.1.2)$$

在 (3.1.2) 式中, 若设 x 为区间 $[a, b]$ 内一点, $x + \Delta x$ 为该区间内另一点 ($\Delta x > 0$ 或 $\Delta x < 0$), 则在区间 $[x, x + \Delta x]$ (当 $\Delta x > 0$) 或在区间 $[x + \Delta x, x]$ (当 $\Delta x < 0$) 内 (3.1.2) 式就成为

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x \quad (0 < \theta < 1). \quad (3.1.3)$$

令 $y = f(x)$, 则 (3.1.3) 式又可写成

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x \quad (0 < \theta < 1)$$

因此, 拉格朗日中值定理也叫做有限增量定理, 上式也称为有限增量公式.

若 $f(x)$ 当 $x \geq a$ 时满足拉格朗日中值定理, 则有

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a), \quad (\xi \in (a, x)) \quad (3.1.4)$$

拉格朗日中值定理是微分学的基本定理, 在理论上和应用上都具有重要的意义, 有时也称拉格朗日中值定理为微分中值定理. 虽然定理只肯定了至少有一点 ξ 存在, 没有说明如何去求, 有几个点存在, 但这并不影响定理的应用. 而且在实际应用时, 一般只要知道有这样的点存在就够了.

在拉格朗日中值定理的条件下, 若加上条件 $f(a) = f(b)$, 则可知在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$, 这就是罗尔定理, 罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情形.

由拉格朗日中值定理可以推出下面两个重要结论.

推论 1 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点处的导数均为零, 则在 (a, b) 内 $f(x) \equiv C$ (C 为常数).

证明 设 x_1, x_2 为区间 (a, b) 内的任意两点, 且 $x_1 < x_2$, 则在 $[x_1, x_2]$ 上 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件, 于是有

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2).$$

由假设知, $f'(\xi) = 0$, 因此

$$f(x_2) - f(x_1) = 0, \text{ 即 } f(x_2) = f(x_1).$$

因为 x_1, x_2 是 (a, b) 内的任意两点, 这就得出 $f(x)$ 在 (a, b) 内是一个常数.

推论 2 如果对任意 $x \in (a, b)$, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都有 $f'(x) = g'(x)$, 则在 (a, b) 内有 $f(x) = g(x) + C$ (C 为常数).

推论 2 可由推论 1 推出.

利用拉格朗日中值定理可以证明一些恒等式.

例 3.1.4 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 证明: 必存在 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$f(1) = 2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi)$$

证明 注意到 $2xf(x) + x^2 f'(x)$ 是 $x^2 f(x)$ 的导函数, 我们考虑函数 $F(x) = x^2 f(x)$.

容易验证 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 由拉格朗日中值定理可知, 必存在 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$\frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F'(\xi)$$

而 $F(1) = f(1)$, $F(0) = 0$, $F'(\xi) = 2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi)$

所以 $f(1) = 2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi)$, $\xi \in (0,1)$. 证毕.

利用拉格朗日中值定理还可以证明一些不等式.

例 3.1.5 证明不等式 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ 对一切 $x > 0$ 成立.

证明 由于 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续可导, 对任何 $x > 0$, 在 $[0, x]$ 上由拉格朗日中值定理, 至少存在一点 $\xi \in (0, x)$, 有

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)x \quad \xi \in (0, x),$$

即 $\ln(1+x) = \frac{1}{1+\xi}x \quad \xi \in (0, x)$,

由于 $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\xi} < 1$

所以 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, 对一切 $x > 0$ 成立. 证毕.

3.1.3 柯西中值定理

定理 3.1.3 设函数 $f(x), g(x)$ 满足下列条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$.

则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

证明 由拉格朗日中值定理, 在开区间 (a, b) 内若 $g'(x) \neq 0$, 则

$$g(b) - g(a) = g'(\eta)(b - a) \neq 0$$

作辅助函数

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)]$$

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理的条件, 由罗尔定理得, 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi)$$

由于 $g'(\xi) \neq 0$, 我们得到

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

证毕.

柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广, 而当 $g(x) = x$ 时, 柯西中值定理就变成拉格朗日中值定理.

例 3.1.6 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; 在开区间 (a, b) 内可导, 试证: 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$ ($0 < a < b$).

证明 待证等式变形为 $\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \xi f'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{(\ln x)' \Big|_{x=\xi}}$

作辅助函数 $g(x) = \ln x$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$, $x \in (a, b)$, 从而函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足柯西中值定理的条件, 于是在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ,

$$\text{使得} \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

$$\text{即} \quad \frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}},$$

亦即 $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$ ($0 < a < b$), 证毕.

习题 3.1

1. 检验下列函数在给定区间上是否满足罗尔定理条件? 若满足, 求出使 $f'(\xi) = 0$ 的点 ξ .

(1) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$, $x \in [-1, 2]$;

(2) $f(x) = |x|$, $x \in [-2, 2]$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in [-1, 1]$;

$$(4) f(x) = \frac{2-x^2}{x^4}, \quad x \in [-1, 1].$$

2. 不求函数 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ 的导数, 说明 $f'(x) = 0$ 有几个实根, 并指出各根所在的区间.

3. 证明下列函数在指定区间上满足拉格朗日中值定理, 并求出 ξ .

$$(1) f(x) = x^3, \quad x \in [1, 4];$$

$$(2) f(x) = \sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 试证在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$. (提示: 设 $F(x) = f(x)e^x$).

5. 利用拉格朗日中值定理证明下列不等式.

$$(1) \frac{b-a}{b} \leq \ln \frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a} \quad (0 < a < b);$$

$$(2) \frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2} \quad (0 < a < b);$$

$$(3) e^x \geq ex \quad (x \geq 1);$$

$$(4) x \leq \tan x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right).$$

6. 设函数 $f(x)$ 满足在 $[a, b]$ 上可导, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

3.2 洛必达法则

柯西中值定理还提供了一种求极限的方法. 如果当 $x \rightarrow a$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同时趋于零或同时趋于无穷大, 那么极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ 可能存在, 也可能不存在, 通常把这种极限称为未定式的极限, 并简记为 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ (注意只是作为记号), 称为零比零型和无穷比无穷型未定式. 这种极限不能直接用运算法则, 下面我们首先给出一个求 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限的法则——洛必达法则, 然后再介绍其他未定式极限的求法.

3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限

定理 3.2.1 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=a$ 的某空心邻域内有定义, 且满足如下条件:

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;
 (2) $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 在该邻域内都存在, 且 $g'(x) \neq 0$;
 (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 ∞)

则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

此定理可用柯西定理证明.

定理 3.2.1 的结论对于 $x \rightarrow \infty$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限问题同样适用.

例 3.2.1 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 1}{x - 1}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{100x^{99}}{1} = 100$.

例 3.2.2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x(1+x)} = \infty$.

例 3.2.3 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$.

如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 且 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 能满足定理中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 应

满足的条件, 则可继续使用洛必达法则. 即有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

且可依此类推, 直到求出所要求的极限.

例 3.2.4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$.

解 这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x}.$$

上式右端仍是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 且满足洛必达法则条件, 再应用洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin x} = 6.$$

例 3.2.5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1.$$

此外, 在求 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限时, 也可以同时使用等价无穷小代换.

例 3.2.6 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - x - 1)\arcsin x}{\ln(1+x)(e^x - 1)\tan x}$.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - x - 1)\arcsin x}{\ln(1+x)(e^x - 1)\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限

定理 3.3.2 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 $x=a$ 的某空心邻域内有定义, 且满足如下条件

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$;
- (2) $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 在该邻域内都存在, 且 $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 ∞),

则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例 3.2.7 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{3 \sec^2 3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos 3x (-3 \sin 3x)}{2 \cos x (-\sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{6 \cos 6x}{2 \cos 2x} = 3. \end{aligned}$$

定理 3.2.2 的结论对于 $x \rightarrow \infty$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限问题同样适用.

例 3.2.8 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\mu}$ ($\mu > 0$).

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\mu} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu x^\mu} = 0$.

例 3.2.9 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 + \ln \sin x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1 + \ln \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1$.

3.2.3 其他未定式的极限

未定式除 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型外, 还有 $0 \cdot \infty$ 、 $\infty - \infty$ 、 1^∞ 、 0^0 、 ∞^0 型等五种类型, 这些

未定式都可化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 然后再利用洛必达法则求其极限. 下面我们

通过例子简单说明这类问题的解法.

1. $0 \cdot \infty$ 型未定式

设在自变量的某一变化过程中 $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow \infty$, 则 $f(x)g(x)$ 可变形为

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型} \right) \quad \text{或} \quad \frac{\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ 型} \right).$$

例 3.2.10 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$ ($0 \cdot \infty$ 型)

解 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4}{-3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3}{3} = 0$.

2. $\infty - \infty$ 型未定式

例 3.2.11 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ ($\infty - \infty$ 型).

解 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\frac{x-1}{x} + \ln x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x} + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

3. 1^∞ 、 0^0 、 ∞^0 型未定式

由于它们是来源于幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的极限, 因此通常可用取对数的方法或利用 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ 公式化为 $0 \cdot \infty$ 型未定式, 再化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型求解.

例 3.2.12 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ (0^0 型).

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x}$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

例 3.2.13 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\sin x}$ (∞^0 型).

解 设 $y = (\cot x)^{\sin x}$,

$$\text{两边取对数} \quad \ln y = \sin x \ln \cot x$$

$$\text{于是} \quad y = e^{\sin x \ln \cot x}$$

$$\text{而} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cot x} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{-\frac{1}{\sin^2 x} \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1.$$

例 3.2.14 求 $\lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}$ (1^∞ 型).

$$\text{解 设 } y = (\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}}, \text{ 则 } \ln y = \frac{1}{1-\ln x} \ln(\ln x),$$

$$\text{即 } y = e^{\frac{1}{1-\ln x} \ln(\ln x)}$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow e} \ln y = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \ln x}{1 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow e} \left(-\frac{1}{\ln x} \right) = -1$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\frac{1}{1-\ln x}} = e^{-1}.$$

在使用洛必达法则求极限时, 要注意以下几个问题:

(1) 每次使用法则之前, 必须检验是否属于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 若不是未定式, 就不能使用法则;

(2) 如果有可约因子, 或有非零极限值的乘积因子, 则可先行约去或提出, 以简化计算.

(3) 法则中的条件是充分而非必要的, 遇到 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时, 不能断言 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在, 此时洛必达法则失效, 需另寻其他方法处理.

$$\text{例如 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$$

上式右端的极限不存在, 但不能由此说原极限不存在. 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 + 0 = 1.$$

习题 3.2

1. 利用洛必达法则求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 3x + 2}{x - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\operatorname{arccot} x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x(1 - \cos x)};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \tan x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln x}{x \ln x};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x;$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right);$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}};$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x)^{\sin x};$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x;$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

2. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ e^{\frac{1}{2}}, & x \leq 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

3. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x}$ 都存在, 但不能使用洛必达法则证明.

3.3 函数的单调性、极值和最值

在第 1 章中已经介绍了函数在区间单调的概念, 用定义判定函数的单调性是比较困难的, 现在我们以中值定理为依据, 利用导数来研究函数的单调性, 并利用导数求函数的极值与最值.

3.3.1 函数的单调性

由图 3.3 可以看出, 如果曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处的切线斜率都是正的, 则曲线是上升的, 即函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加; 如果每一点处的切线斜率都是负的, 则曲线是下降的, 即函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少. 由此可见, 函数的单调性与导数的符号有着密切的联系. 为此可以利用导数的符号判定函数的单调性.

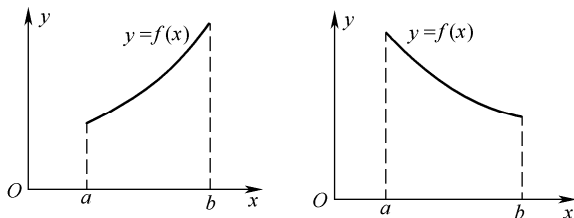


图 3.3

定理 3.3.1 设函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导.

(1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加;

(2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

证明 设 x_1, x_2 是 $[a, b]$ 上任意两点, 且 $x_1 < x_2$. 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 故有

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2)$$

对于定理 3.3.1 中的 (1), 因为 $f'(\xi) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, 于是可推出 $f(x_2) > f(x_1)$, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加.

类似地可证明 (2).

定理中的区间可以换成其他各种区间 (包括无穷区间), 当 $f(x)$ 在某区间的个别点处导数为零, 而在其余各点处导数都为正 (或负) 时, 那么 $f(x)$ 在该区间上仍是单调增加 (或单调减少) 的.

例 3.3.1 判断函数 $y = x^5$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调性.

解 $y' = 5x^4 \geq 0 \quad x \in (-\infty, +\infty)$,

所以函数 $y = x^5$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

例 3.3.2 判断函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad (x \neq 0),$$

在 $(-\infty, 0)$ 内, $y' < 0$, 所以函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少,

在 $(0, +\infty)$ 内, $y' > 0$, 所以函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

上题中, $x = 0$ (函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的不可导点) 是函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间的分界点, 但不可导点未必是单调区间的分界点, 如 $x = 0$ 不是 $y = \sqrt[3]{x}$ 单调区间的分界点.

此外, 导数为零的点也可能是单调区间的分界点, 如 $x = 0$ 是 $y = x^4$ 但不是 $y = x^5$ 单调区间的分界点.

综上所述, 求函数的单调区间的步骤如下:

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求 $f'(x)$;

(3) 求出 $f'(x) = 0$ 的点和 $f'(x)$ 不存在的点, 用这些点将函数的定义域划分为若干个区间;

(4) 考察 $f'(x)$ 在每个区间内的符号, 从而判别函数 $f(x)$ 在各子区间内的单调性.

例 3.3.3 确定函数 $f(x) = x^3 - 27x + 3$ 的单调区间.

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且

$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x-3)(x+3)$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -3$, $x_2 = 3$,

列表讨论如下.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑		↓		↑

从而函数的单调增加区间为 $(-\infty, -3]$, $[3, +\infty)$; 单调减少区间为 $[-3, 3]$.

例 3.3.4 求函数 $f(x) = x - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且

$$f'(x) = 1 - x^{-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x}}$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$,

当 $x = 0$ 时, $f'(x)$ 不存在.

列表讨论如下.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	↑		↓		↑

从而函数的单调增加区间为 $(-\infty, 0]$, $[1, +\infty)$; 单调减少区间为 $[0, 1]$.

利用函数的单调性还可以证明某些不等式.

例 3.3.5 证明当 $x > 1$ 时, 不等式 $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ 成立.

证明 设 $f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$, 则

$$f(1) = 0, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

因为当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调增加.

因此当 $x > 1$ 时, $f(x) > f(1) = 0$, 则有

$$2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x} > 0,$$

即 $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \quad (x > 1).$

例 3.3.6 证明函数 $f(x) = x + \ln x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 内有唯一零点.

证明 $f(x) = x + \ln x$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 内处处可导, 且

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0,$$

因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内严格单调增加.

又由 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$,

所以, 由连续函数的零点定理, $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上至少有一个零点, 因此函数 $f(x) = x + \ln x$ 在定义域内 $(0, +\infty)$ 有唯一零点.

3.3.2 函数的极值

在实际中, 常常会遇到这样一类问题: 在一定条件下, 怎样使“材料最省”, “成本最低”, “效率最高”或“投资最少”等. 这类问题在数学上归结为求函数的最大值或最小值问题.

为了讨论最大值、最小值问题, 我们先来研究函数的极值.

定义 3.3.1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 若对此邻域内任一点 x ($x \neq x_0$), 均有 $f(x) < f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值; 若对此邻域内任一点 x ($x \neq x_0$), 均有 $f(x) > f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值.

函数的极大值与极小值统称为函数的极值, 使函数取得极值的点称为极值点.

说明: 函数的极值概念是局部性的, 函数在点 x_0 取得极大(或极小)值, 仅表示在局部范围内 $f(x_0)$ 大于(或小于) x_0 邻近处的函数值, 这与函数在某个区间上的最大(或最小)值的概念不同, 最大值、最小值是指一个区间上的整体性质, 如图 3.4 中, x_1 , x_4 分别是函数的极大值点与极小值点, 但相应的函数值并不是整个区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值. 另外, 从整体来看, 同一个函数, 它的某些极小值可能大于它的某些极大值, 如图 3.4 中, 函数 $f(x)$ 的极小值 $f(x_4)$ 就大于它的极大值 $f(x_1)$.

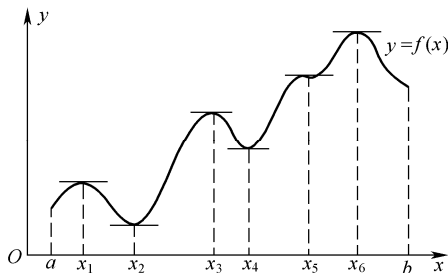


图 3.4

从图 3.4 中还可以看出, 在函数取得极值处, 曲线上的切线都是水平的, 由此可得函数取得极值的必要条件.

定理 3.3.2 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数存在, 且在 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$.

证明 不妨设函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值, 即存在点 x_0 的某一邻域, 对此邻域内任一点 x ($x \neq x_0$), 均有 $f(x) < f(x_0)$.

因为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数存在, 所以有

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

根据 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件及极限的保号性, 得

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

所以, $f'(x_0) = 0$.

类似可证 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值时 $f'(x_0) = 0$.

使函数的导数值为零的点称为驻点(或稳定点、临界点).

通过求解方程 $f'(x) = 0$, 即可找出函数 $f(x)$ 的所有驻点.

定理 3.3.2 表明, 可导函数的极值点必是驻点, 但反过来, 函数的驻点却不一定是极值点.

从图 3.4 中可看出, 使 $f'(x) = 0$ 的点 x 共有 6 个, 但取得极值的点只有 5 个: $f(x)$ 在点 x_1 、 x_3 和 x_6 取得极大值, 在点 x_2 和 x_4 取得极小值, 而 $f(x_5)$ 既不是极大值也不是极小值.

此外, 不可导的点也可能是函数的极值点.

综上所述, 函数的驻点和不可导点是可能的极值点. 那么怎样来判别这些点是否为极值点呢?

由图 3.4 看出, 如驻点 x_0 左侧邻近函数单调增加, 而 x_0 右侧邻近函数单调减少, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值; 反之若 x_0 左侧邻近函数单调减少, x_0 右侧邻近函数单调增加, 则函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

由函数单调性与导数的符号之间的关系, 可进一步得到用一阶导数来判定驻点或不可导点 x_0 是否为极值点的方法.

定理 3.3.3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域内可导, x_0 为 $f(x)$ 的驻点(即 $f'(x_0) = 0$)或不可导点:

(1) 若当 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;

(2) 若当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;

(3) 若在 x_0 两侧 $f'(x)$ 的符号相同, 则 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

根据以上两个定理,可按下列步骤求 $f(x)$ 的极值点和极值.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的定义域 (或给定区间);
- (2) 求出导数 $f'(x)$;
- (3) 求出全部 $f'(x)=0$ 的点和 $f'(x)$ 不存在的点;
- (4) 列表讨论,考察在 (3) 中的点处是否取得极值,是极大值还是极小值;
- (5) 求出各极值点处的函数值,就得到函数 $f(x)$ 的全部极值.

例 3.3.7 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3).$$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1$, $x_2=3$.

驻点将定义域分成三部分,确定各区间内 $f'(x)$ 的符号,从而判定各驻点是否为极值点.列表讨论如下.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	有极大值	↓	有极小值	↑

可见,函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值 $f(-1)=10$; 在 $x=3$ 处取得极小值 $f(3)=-22$.

例 3.3.8 求函数 $f(x)=x^2+1-2\ln x$ 的极值.

解 函数的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x)=2x-2\frac{1}{x}=2\frac{x^2-1}{x}$.

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=1$ ($x=-1$ 舍去).

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$.

可见,函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=0$.

例 3.3.9 求函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}.$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=1$,

当 $x=0$ 时, $f'(x)$ 不存在.

列表讨论如下.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	↑	有极大值	↓	有极小值	↑

从而, 函数的极大值为 $f(0)=0$, 极小值为 $f(1)=-\frac{1}{2}$.

还可用二阶导数的符号来判别函数的驻点是否为极值点.

定理 3.3.4 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数, 且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$,

则

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值;

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

证明 在情形 (1) 中, 由于 $f''(x_0)<0$, 按二阶导数的定义有

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0.$$

根据函数极限的局部保号性, 当 x 在 x_0 的足够小的去心邻域内时,

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0.$$

因为 $f'(x_0)=0$, 所以上式即

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

从而知道, 对于去心邻域内的 x 来说, $f'(x)$ 与 $x-x_0$ 符号相反. 因此, 当 $x-x_0<0$ 即 $x<x_0$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x-x_0>0$ 即 $x>x_0$ 时, $f'(x)<0$; 于是根据定理 3.3.3 可知, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值.

类似地, 可以证明情况 (2).

此定理表明, 如果 $f(x)$ 在驻点 x_0 处的二阶导数 $f''(x_0)\neq 0$, 那么该驻点 x_0 一定是极值点, 并且可由 $f''(x_0)$ 的符号确定 $f(x_0)$ 是极大值还是极小值. 但是当 $f''(x_0)=0$ 时, 此定理失效, 要用定理 3.3.3 进行判定.

例 3.3.10 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 $f'(x)=6x(x^2-1)^2$, $f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$.

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

因 $f''(0)=6>0$, 所以 $f(0)=0$ 是函数的极小值.

又 $f''(-1)=f''(1)=0$, 此时定理 3.3.4 失效, 仍用定理 3.3.3 判定.

当 $x<-1$ 时, $f'(x)<0$; 当 $-1<x<0$ 时, $f'(x)<0$. 因经过 $x=-1$ 时, 导数 $f'(x)$ 的符号不变, 所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处没有极值.

同理, $f(x)$ 在 $x=1$ 处也没有极值.

例 3.3.11 试问 a 为何值时, 函数 $f(x)=a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值?

它是极大值还是极小值? 并求此极值.

解 函数 $f(x)=a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ 处处可导, 且

$$f'(x) = a \cos x + \cos 3x.$$

函数在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 则 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, 即 $a \cos \frac{\pi}{3} + \cos \pi = 0$, 故 $a = 2$.

又因为 $f''(x) = -2 \sin x - 3 \sin 3x$, $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{3} - 3 \sin \pi = -\sqrt{3} < 0$,

因此, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{3} + 3 \sin \pi = \sqrt{3}$ 为极大值.

3.3.3 函数的最大值和最小值

函数在区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值是全局性的概念, 是函数在所考察的区间上全部函数值中的最大者和最小者, 这与极值的概念是有区别的.

连续函数在区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值可通过比较如下几类点的函数值得到:

- (1) 端点处的函数值 $f(a)$, $f(b)$;
- (2) 开区间 (a, b) 内, 使 $f'(x) = 0$ 的点的函数值;
- (3) 开区间 (a, b) 内, 使 $f'(x)$ 不存在的点的函数值.

这些值中最大的就是函数在 $[a, b]$ 上的最大值, 最小的就是函数在 $[a, b]$ 上的最小值.

例 3.3.12 求函数 $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ 在 $[-2, 6]$ 上的最大值与最小值.

解 因 $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, 没有不可导的点, 且 $f(-1) = \frac{5}{3}$, $f(3) = -9$, 端点处的函数值分别为 $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(6) = 18$. 故 $f(x)$ 在 $[-2, 6]$ 上的最大值为 $f(6) = 18$, 最小值为 $f(3) = -9$.

在下列特殊情况下, 求最大值最小值的方法为:

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调增加且连续, 则 $f(a)$ 是最小值, $f(b)$ 是最大值; 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调减少且连续, 则 $f(a)$ 是最大值, $f(b)$ 是最小值.

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且在 (a, b) 内部只有一个驻点 x_0 , 则当 x_0 是极大值点时, $f(x_0)$ 是最大值, 当 x_0 是极小值点时, $f(x_0)$ 是最小值.

(3) 实际问题中往往根据问题的性质便可断定可导函数 $f(x)$ 在其区间内部确有最大值 (或最小值), 而当 $f(x)$ 在此区间内部又只有一个驻点 x_0 时, 立即可断定 $f(x_0)$ 就是所求的最大值 (或最小值).

例 3.3.13 问函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ($x \geq 0$) 在何处取得最大值?

解 函数在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = -1$ (舍去), $x = 1$.

由 $f''(1) = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} < 0$, 知 $x = 1$ 为极大值点.

又因为函数在 $[0, +\infty)$ 上的驻点唯一, 故极大值点就是最大值点, 即 $x = 1$ 为最大值点, 且最大值为 $f(1) = \frac{1}{2}$.

在工农业生产、经济管理和经济核算中, 常常要解决在一定条件下, 怎样使投入最小、产出最多、成本最低、效益最高、利润最大等问题. 这些问题反映在数学上就是求函数最大值和最小值问题.

例 3.3.14 用一块边长为 1 米的正方形铁皮, 在四角各剪去一个相等的小正方形, 如图 3.5 所示, 制作一只无盖油箱, 问在四周剪去多大的正方形才能使容积最大?

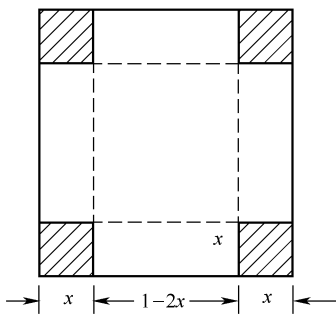


图 3.5

解 设在正方形铁皮的四角截去的小正方形的边长为 x , 则油箱的容积为

$$V = (1 - 2x)^2 \cdot x \quad \left(0 < x < \frac{1}{2}\right),$$

$0 < x < \frac{1}{2}$ 是由问题的实际意义确定的, 于是问题转化为在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内, 求函数 V 的最大值.

$$\begin{aligned} V' &= 2(1 - 2x)(-2) \cdot x + (1 - 2x)^2 \\ &= (1 - 2x)(1 - 6x). \end{aligned}$$

令 $V' = 0$, 得 $x_0 = \frac{1}{6}$, $x_1 = \frac{1}{2}$ (舍). 所以 V 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内只有一个驻点 $x_0 = \frac{1}{6}$.

根据题意, 最大容积一定存在, 所以此驻点就是 V 的最大值点. 因此, 当截去的小正方形的边长为 $\frac{1}{6}$ 米时, 所得油箱的容积最大.

例 3.3.15 如图 3.6 所示, 工厂 A 到铁路的垂直距离 AB 为 20 km, 铁路线上从垂足 B 到火车站 C 的长度 BC 为 100 km. 今要在 BC 线上选定一点 M 作为转运站向工厂修筑一条公路, 已知在铁路上运送每吨公里货物的运费与在公路上运送每吨公里货物的运费之比为 3:5, 为使产品从工厂 A 运到火车站 C 的运费最省, 问 M 点应选在何处?

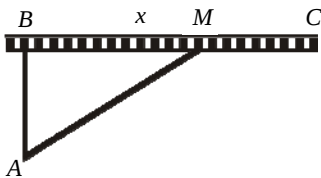


图 3.6

解 设 BM 长为 x (km), 根据题意, 总运费 y 与 x 间的函数关系为

$$y = 5k\sqrt{20^2 + x^2} + 3k(100 - x) \quad (0 \leq x \leq 100),$$

其中 k 为比例系数. 于是问题转化为求函数 y 在 $[0, 100]$ 上的最小值问题. 因为

$$y' = \left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3 \right) k,$$

令 $y' = 0$, 得 $x_0 = 15$. 因为 y 在 $[0, 100]$ 内只有一个驻点 $x_0 = 15$, 由题意, 最小值存在, 故此驻点就是 y 的最小值点. 因此 M 点应选在离 B 为 15 km 处使运费最省.

习题 3.3

1. 判断下列函数的单调性.

(1) $f(x) = x - \sin x$;

(2) $f(x) = e^x + 1$;

(3) $f(x) = \arctan x - x$;

(4) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

2. 确定下列函数的单调区间.

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$;

(2) $f(x) = 2x^2 - \ln x$;

(3) $f(x) = x - e^x$;

(4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

3. 证明下列不等式.

(1) 当 $x > 0$ 时, $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$;

(2) 当 $x > 0$ 时, $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$.

4. 求下列函数的极值.

(1) $f(x) = 2 + x - x^2$;

(2) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;

(3) $f(x) = x - \ln x$;

(4) $f(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$;

(5) $f(x) = x + \sqrt{1-x}$;

(6) $f(x) = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$.

5. 求下列函数在所给区间上的最大值与最小值.

(1) $y = 2x^3 - 3x^2$, $[-1, 4]$;

(2) $y = x + \sqrt{1-x}$, $[-5, 1]$;

(3) $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $[-2, 2]$;

(4) $y = \arctan \frac{1-x}{1+x}$, $[0, 1]$.

6. 问函数 $y = x^2 - \frac{54}{x}$ ($x < 0$) 在何处取得最小值?

7. 某车间要靠墙壁盖一间长方形小屋, 现有存砖只够砌 20m 长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

8. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金为 1000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 50 元, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 试问将房租定为多少可获得最大收入?

9. 已知制作一个背包的成本为 40 元, 如果每一个背包的售价为 x 元, 售出的背包数由

$$n = \frac{a}{x-40} + b(80-x)$$

给出, 其中 a, b 为正常数. 问什么样的售价能带来最大利润?

10. 试证明: 如果函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足条件 $b^2 - 3ac < 0$, 那么这个函数没有极值.

3.4 曲线的凹凸性与拐点

利用一阶导数的符号可判别函数的升降, 即若在某一区间 $f'(x) > 0$ (或 < 0), 则相应的那段曲线弧是上升 (或下降) 的; 虽然这样, 曲线弧的形状还可有多种不同的情形, 例如是凹形或是凸形等. 下面我们利用二阶导数的符号来判别曲线的弯曲方向, 即凹凸性, 首先给出曲线的凹凸的定义.

定义 3.4.1 在某一区间内, 如果曲线弧位于其上每一点处切线的上方, 则称

曲线弧在该区间是凹的(如图 3.7 (a) 所示);

如果曲线弧位于其上每一点处切线的下方, 则称曲线弧在该区间是凸的(如图 3.7 (b) 所示).

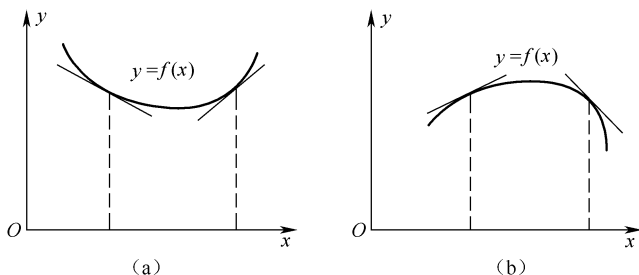


图 3.7

考察函数在任意两点 x_1, x_2 , 以及 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 点处的函数值, 可以有如下的等价

定义:

等价定义 设函数 $f(x)$ 在某一区间连续, 如果对于该区间内任意两点 x_1, x_2 , 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

那么, 称函数 $f(x)$ 在该区间的图形即曲线弧是凹的; 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

那么, 称函数 $f(x)$ 在该区间的图形即曲线弧是凸的.

由图 3.7 可以看出, 对于凹曲线, 其切线斜率 $f'(x)$ 是递增函数, 应有 $f''(x) \geq 0$; 对于凸曲线, 其切线斜率 $f'(x)$ 是递减函数, 应有 $f''(x) \leq 0$. 这就启发我们能否用函数 $f(x)$ 的二阶导数的正、负号判断曲线的凹凸性, 事实上, 有如下定理:

定理 3.4.1 (曲线凹凸性的判别法)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数, 那么

- (1) 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则曲线弧 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹的;
- (2) 若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则曲线弧 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凸的.

证明 在情形(1)中, 设 x_1, x_2 为 $[a, b]$ 内任意两点, 且 $x_1 < x_2$, 记 $\frac{x_1+x_2}{2} = x_0$, 并记 $x_2 - x_0 = x_0 - x_1 = h$, 则 $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0 + h$, 由拉格朗日中值公式得

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta_1 h)h$$

$$f(x_0) - f(x_0-h) = f'(x_0 - \theta_2 h)h$$

其中 $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$. 两式相减, 即得

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = [f'(x_0 + \theta_1 h) - f'(x_0 - \theta_2 h)]h,$$

对 $f'(x)$ 在区间 $[x_0 - \theta_2 h, x_0 + \theta_1 h]$ 上再利用拉格朗日中值公式, 得

$$[f'(x_0 + \theta_1 h) - f'(x_0 - \theta_2 h)]h = f''(\xi)(\theta_1 + \theta_2)h^2$$

其中 $x_0 - \theta_2 h < \xi < x_0 + \theta_1 h$. 按情形 (1) 的假设, $f''(\xi) > 0$, 故有

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) > 0$$

$$\text{即} \quad f(x_0) < \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h)}{2}$$

$$\text{亦即} \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

所以曲线弧 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹的.

类似地可证明情形 (2).

例 3.4.1 讨论曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的凹凸性.

解 函数 $y = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且 $y' = -\frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$.

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $y'' < 0$, 曲线是凸的;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 曲线是凹的.

由上例可以看出, 函数在它的不同定义区间内的图形的凹凸性可能不同.

例 3.4.2 判定曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且 $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$.

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $y'' < 0$, 曲线在 $(-\infty, 0]$ 是凸的;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 曲线在 $[0, +\infty)$ 是凹的.

一般地, 设 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是 I 的内点 (即除端点外的点), 如果曲线 $y = f(x)$ 在经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时凹凸性改变了, 那么称点 $(x_0, f(x_0))$ 为这个曲线的拐点. 即连续曲线凹弧与凸弧的分界点为曲线的拐点.

由此定义可知, $f''(x)$ 在拐点横坐标左右两侧邻近处必然异号, 而在拐点横坐标处, $f''(x)$ 等于零或不存在.

例如, 函数 $y = \sqrt[3]{x}$ 的二阶导数 $y'' = -\frac{2}{9x^3\sqrt{x^2}}$ 在 $x = 0$ 处不存在, 但点 $(0, 0)$ 却是曲线的拐点.

在例 3.4.1 中, 尽管在 $x = 0$ 的左右 y'' 的符号相异, 但 $x = 0$ 不是该曲线的拐点, 因为函数在该点不连续.

综上所述, 求曲线的凹凸区间与拐点的步骤如下:

(1) 确定 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求出 $f'(x)$, $f''(x)$;

(3) 求出 $f''(x)=0$ 和 $f''(x)$ 不存在的点, 用这些点将函数的定义域划分为若干个子区间;

(4) 考察在每个区间内 $f''(x)$ 的符号, 从而判别曲线在各子区间内的凹凸性, 最后得到拐点;

(5) 写出曲线的凹凸区间与拐点.

例 3.4.3 求曲线 $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的凹凸区间及拐点.

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且 $y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $y'' = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

令 $y'' = 0$, 得 $x = \pm 1$, 列表讨论如下.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	+	0	-	0	+
y	凹	拐点 $(-1, e^{-\frac{1}{2}})$	凸	拐点 $(1, e^{-\frac{1}{2}})$	凹

可见, 曲线在区间 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, +\infty)$ 上是凹的, 在区间 $[-1, 1]$ 上是凸的, 拐点为 $(-1, e^{-\frac{1}{2}})$, $(1, e^{-\frac{1}{2}})$.

例 3.4.4 求曲线 $y = x^4 - 4x^3 + 1$ 的凹凸区间及拐点.

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且 $y' = 4x^3 - 12x^2$, $y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$.

令 $y'' = 0$, 得 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, 列表讨论如下.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y''	+	0	-	0	+
y	凹	拐点 $(0, 1)$	凸	拐点 $(2, -15)$	凹

可见, 曲线在区间 $(-\infty, 0]$ 及 $[2, +\infty)$ 上是凹的, 在区间 $[0, 2]$ 上是凸的, 拐点为 $(0, 1)$, $(2, -15)$.

例 3.4.5 求曲线 $y = 1 - \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}$ 的凹凸区间及拐点.

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $y' = -x^{\frac{2}{3}}$, $y'' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

当 $x = 0$ 时, y'' 不存在, 它把 $(-\infty, +\infty)$ 分成两个子区间: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

在 $(-\infty, 0)$ 内, $y'' > 0$, 曲线在 $(-\infty, 0]$ 上是凹的;

在 $(0, +\infty)$ 内, $y'' < 0$, 曲线在 $[0, +\infty)$ 上是凸的.

拐点为 $(0, 1)$.

习题 3.4

1. 求下列曲线的凹凸区间及拐点:

(1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$; (2) $y = \ln(x^2 + 1)$;

(3) $y = x \arctan x$; (4) $y = xe^{-x}$;

(5) $y = x^2 + \ln x$; (6) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{10}\sqrt[3]{x^5}$.

2. 试确定 a, b 的值, 使曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 有一拐点 $(1, 3)$.

3. 试确定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中的 a, b, c, d , 使得曲线在 $x = -2$ 处有水平切线, 点 $(1, -10)$ 为拐点, 且点 $(-2, 24)$ 在曲线上.

4. 试确定 $y = k(x^2 - 3)^2$ 中 k 的值, 使曲线在拐点处的法线通过原点.

*3.5 函数图形的描绘

上面讨论了函数的各种形态, 这为描绘函数的图形打下了基础. 为使描绘的函数图形更准确, 首先介绍曲线渐近线的概念.

定义 3.5.1 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$) (a 为常数),

则称直线 $y = a$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线 (平行于 x 轴); 若 $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$

(或 $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$), 则称直线 $x = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条垂直渐近线 (垂直于 x 轴).

渐近线反映了连续曲线在无限延伸时的变化情况.

例如, 对于双曲线 $y = \frac{1}{x}$, 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 所以直线 $y = 0$ 是该曲线的水平渐近

线; 又因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, 所以直线 $x = 0$ 是曲线的垂直渐近线. 也就是说, 当动点沿双

曲线无限远离原点时, 双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = 0$ 或 $x = 0$ 无限接近 (如图 3.8 所示).

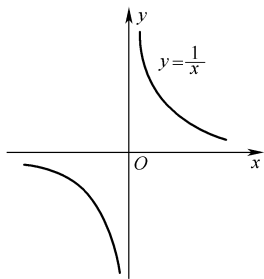


图 3.8

综上各节的讨论, 描绘函数图形的一般步骤如下:

- (1) 确定函数的定义域;
- (2) 考察函数的周期性及奇偶性;
- (3) 确定函数的单调区间与极值;
- (4) 确定曲线的凹凸区间与拐点;
- (5) 考察曲线的渐近线;
- (6) 求曲线与坐标轴的交点;
- (7) 描绘函数的图形.

例 3.5.1 作函数 $y = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$ 的图形.

解 (1) 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$(2) \quad y' = -\frac{4(x+2)}{x^3}, \quad y'' = -\frac{8(x+3)}{x^4},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = -2$; 令 $y'' = 0$ 得 $x = -3$.

$x = -3, -2, 0$ 将 $(-\infty, +\infty)$ 分成四个子区间, 函数的单调性、极值、凹凸性及拐点可以通过列表来讨论.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	-		-	0	+		-
y''	-	0	+		+		+
y	↓		↓		↑		↓

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{4(x+1)}{x^2} - 2 \right] = -2$, 所以 $x = -2$ 为水平渐近线;

又因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{4(x+1)}{x^2} - 2 \right] = \infty$, 所以 $x = 0$ 为垂直渐近线.

(4) 描出几个点: $A(-1, -2)$, $B(1, 6)$, $C(2, 1)$, $D(3, \frac{2}{9})$.

(5) 作出图形, 如图 3.9 所示.

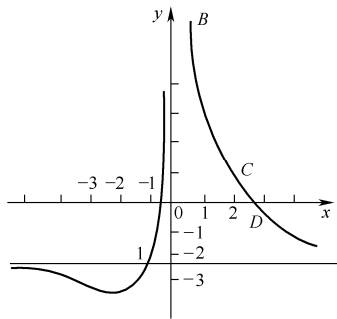


图 3.9

*习题 3.5

描绘下列各函数的图形:

$$(1) y = x^3 - x^2 + 1;$$

$$(2) y = x^2 + \frac{1}{x};$$

$$(3) y = \frac{x}{1+x^2};$$

$$(4) y = e^{-(x-1)^2}.$$

*3.6 导数在经济中的应用

3.6.1 函数的变化率——边际函数

定义 3.6.1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可导, 则称导函数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数.

$f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的边际函数值. 其含义为, 当 $x = x_0$ 时, x 改变一个单位, 相应地 y 改变了约 $f'(x_0)$ 个单位. 实际上, $\Delta y \approx d y = f'(x_0) \cdot \Delta x$, 当 $\Delta x = 1$ 时, $\Delta y \approx f'(x_0)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\Delta x > 0)$$

称为 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \Delta x)$ 内的平均变化率, 它表示在 $(x_0, x_0 + \Delta x)$ 内 $f(x)$ 的平均变化速度.

例 3.6.1 设函数 $y = 2x^2$, 试求 y 在 $x = 5$ 时的边际函数值.

解 因为 $y' = 4x$, 所以 $y'|_{x=5} = 20$.

该值表明: 当 $x = 5$ 时, x 改变一个单位 (增加或减小一个单位), y 约改变 20 个单位 (增加或减少 20 个单位).

在经济学中, 把适用微分学的方法所作的定量分析称为边际分析, 它使经济变量的研究从静态进入动态, 使近代数学更深入地应用于经济分析.

边际函数在经济学理论中有着重要的应用, 在第 1 章中我们介绍了常用的几个函数, 这里我们再来讨论这些函数的具体应用.

1. 边际成本

边际成本是总成本的变化率.

设 C 为总成本, C_1 为固定成本, C_2 为可变成本, $\bar{C}$ 为平均成本, C' 为边际成本, Q 为产量, 则有:

$$\text{总成本函数 } C = C(Q) = C_1 + C_2(Q)$$

平均成本函数 $\bar{C} = \bar{C}(Q) = \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2(Q)}{Q}$

边际成本函数 $C' = C'(Q)$

如已知总成本 $C(Q)$ ，通过除法可求出平均成本 $\bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$

如已知平均成本 $\bar{C}(Q)$ ，通过乘法可求出总成本 $C(Q) = Q\bar{C}(Q)$

如已知成本 $C(Q)$ ，通过微分法可求出边际成本 $C' = C'(Q)$

例 3.6.2 已知某商品的成本函数为 $C = C(Q) = 100 + \frac{Q^2}{4}$ ，求当 $Q = 10$ 时的总成本、平均成本及边际成本。

解 由 $C = 100 + \frac{Q^2}{4}$ ，有 $\bar{C} = \frac{100}{Q} + \frac{Q}{4}$ ， $C' = \frac{Q}{2}$ 。

则当 $Q = 10$ 时，总成本 $C(10) = 125$ ，平均成本 $\bar{C}(10) = 12.5$ ，边际成本 $C'(10) = 5$ 。

例 3.6.3 在例 3.6.2 中，当产量 Q 为多少时，平均成本最小？

解

$$\bar{C}' = -\frac{100}{Q^2} + \frac{1}{4},$$

$$\bar{C}'' = \frac{200}{Q^3}.$$

令 $\bar{C}' = 0$ ，得 $Q^2 = 400$ ， $Q = 20$ （ $Q = -20$ 舍去），

又因为 $\bar{C}''(20) = \frac{200}{20 \times 20 \times 20} = \frac{1}{40} > 0$

所以当 $Q = 20$ 时，平均成本最小。

2. 边际收益

平均收益是生产者平均每售出一个单位产品所得到的收入，即单位商品的售价。边际收益为总收益的变化率。总收益、平均收益、边际收益均为产量的函数。

设 P 为商品价格， Q 为商品量， R 为总收益， $\bar{R}$ 为平均收益， R' 为边际收益，则有

需求函数 $P = P(Q)$

总收益函数 $R = R(Q)$

平均收益函数 $\bar{R} = \bar{R}(Q)$

边际收益函数 $R' = R'(Q)$

需求与收益有如下关系：

总收益 $R = R(Q) = Q \cdot P(Q)$

平均收益 $\bar{R} = \bar{R}(Q) = \frac{R(Q)}{Q} = \frac{QP(Q)}{Q} = P(Q)$

边际收益 $R' = R'(Q)$

总收益与平均收益及边际收益的关系为:

$$\bar{R}(Q) = \frac{R(Q)}{Q}, \quad R(Q) = Q\bar{R}(Q)$$

例 3.6.4 设某产品的价格和销售量的关系为 $P = 10 - \frac{Q}{5}$, 求销售量为 30 时的

总收益、平均收益与边际收益.

解 总收益 $R(Q) = Q \cdot P(Q) = 10Q - \frac{Q^2}{5}, \quad R(30) = 120$

平均收益 $\bar{R}(Q) = P(Q) = 10 - \frac{Q}{5}, \quad \bar{R}(30) = 4$

边际收益 $R'(Q) = 10 - \frac{2}{5}Q, \quad R'(30) = -2$

3. 最大利润原则

在经济学中, 总收益、总成本都可以表示为产量 Q 的函数, 分别记为 $R(Q)$ 和 $C(Q)$, 则总利润 $L(Q)$ 可表示为

$$L = L(Q) = R(Q) - C(Q)$$

$$L'(Q) = R'(Q) - C'(Q)$$

下面讨论最大利润原则.

$L(Q)$ 取得最大值的必要条件为: $L'(Q) = 0$, 即 $R'(Q) = C'(Q)$,

即取得最大利润的必要条件是边际收益等于边际成本.

$L(Q)$ 取得最大值的充分条件为: $L'(Q) = 0$ 且 $L''(Q) < 0$, 即 $R'(Q) = C'(Q)$ 且 $R''(Q) < C''(Q)$,

即取得最大利润的充分条件是边际收益等于边际成本, 且边际收益的变化率小于边际成本的变化率.

例 3.6.5 已知某产品的需求函数为 $P = 10 - \frac{Q}{5}$, 成本函数为 $C = 50 + 2Q$, 求产量为多少时总利润 L 最大?

解 已知 $P(Q) = 10 - \frac{Q}{5}, \quad C(Q) = 50 + 2Q$

于是有

$$R(Q) = 10Q - \frac{Q^2}{5}$$

$$L(Q) = R(Q) - C(Q) = 8Q - \frac{Q^2}{5} - 50$$

$$L'(Q) = 8 - \frac{2}{5}Q,$$

$$L''(Q) = -\frac{2}{5}$$

令 $L'(Q) = 0$, 得 $Q = 20$, $L''(20) < 0$, 所以当 $Q = 20$ 时总利润最大.

例 3.6.6 某工厂生产某种产品, 固定成本 20000 元, 每生产一单位产品, 成本增加 100 元. 已知收益 R 是年产量 Q 的函数

$$R = R(Q) = \begin{cases} 400Q - \frac{1}{2}Q^2, & 0 \leq Q \leq 400 \\ 80000, & Q > 400 \end{cases}$$

问每年生产多少产品时, 总利润最大? 此时总利润是多少?

解 根据题意, 总成本函数为

$$C = C(Q) = 20000 + 100Q$$

从而可得总利润函数为

$$\begin{aligned} L(Q) &= R(Q) - C(Q) \\ &= \begin{cases} 300Q - \frac{1}{2}Q^2 - 20000, & 0 \leq Q \leq 400 \\ 60000 - 100Q, & Q > 400 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'(Q) &= R'(Q) - C'(Q) \\ &= \begin{cases} 300 - Q & 0 \leq Q \leq 400 \\ -100 & Q > 400 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L''(Q) &= R''(Q) - C''(Q) \\ &= \begin{cases} -1 & 0 \leq Q \leq 400 \\ 0 & Q > 400 \end{cases} \end{aligned}$$

令 $L'(Q) = 0$, 得 $Q = 300$.

由于 $L''(300) = -1 < 0$, 故 $Q = 300$ 时 L 最大. 此时

$$L(300) = 90000 - \frac{1}{2} \times 90000 - 20000 = 25000.$$

即当生产量为 300 单位时总利润最大, 其最大利润为 25000 元.

4. 成本最低的生产量问题

在生产实践中经常遇到这样的问题, 即在既定的生产规模条件下, 如何合理安排生产以使成本最低, 利润最大?

设某企业某种产品的生产量为 Q 个单位, $C(Q)$ 代表总成本, $C'(Q)$ 代表边际成本, 生产每个单位产品的平均成本为

$$\bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q},$$

由 $C(Q) = Q \cdot \bar{C}(Q)$ 可得

$$C'(Q) = \bar{C}(Q) + Q \cdot \bar{C}'(Q),$$

由极值存在的必要条件知, 使平均成本为最小的生产量 Q_0 应满足 $\bar{C}'(Q_0) = 0$, 代入上式可知

$$C'(Q_0) = \bar{C}(Q_0).$$

上式导出了经济学中一个重要结论: 使平均成本为最小的生产水平(生产量 Q_0), 正是使边际成本等于平均成本的生产水平(生产量).

例 3.6.7 设某产品的成本函数为 $C(Q) = 54 + 18Q + 6Q^2$, 试求使平均成本最小的产量水平.

解 平均成本 $\bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{54}{Q} + 18 + 6Q$

$$\bar{C}'(Q) = -\frac{54}{Q^2} + 6, \quad \bar{C}''(Q) = \frac{108}{Q^3}$$

令 $\bar{C}'(Q) = 0$, 解得 $Q = 3$.

由于 $\bar{C}''(3) = \frac{108}{27} > 0$,

所以 $Q = 3$ 是平均成本 $\bar{C}(Q)$ 的最小值点, 也就是平均成本最小的产量水平, 此时

$$\bar{C}(3) = 54 = C'(3)$$

即 $Q = 3$ 时, 边际成本等于平均成本, 也使平均成本达到最小.

5. 库存管理问题

企业为了完成一定的生产任务, 必须保证生产正常进行所需的原材料. 但是, 在总需求一定的条件下, 订购费用与保管费用是成反比的. 订购批量大, 订购次数少, 订购费用就低, 而保管费用就要相应增加; 反之, 订购批量小, 订购次数多, 则订购费用高, 而保管费用就相对较少. 因此就出现了如何确定订购批量以使总费用最少的问题.

下面我们只研究等批量等间隔进货的情况, 它是指某种物资的库存量下降到零时, 该物资随即到货, 库存量由零恢复到最高库存 $Q_{\max}$, 每天保证等量供应生产需要, 使之不发生缺货现象, 如图 3.10 所示.

假设某企业某种物资的年需用量为 R , 单价为 P , 平均每次订货费用为 C_1 , 年保管费用率(即保管费用与库存商品价值之比)为 C_2 , 订货批量为 Q , 进货周期为 T , 则年总费用 C 由两部分组成:

(1) 订货费用. 因按假设每次订货费用为 C_1 , 全年订购次数为 $\frac{R}{Q}$, 因此订

货费用为 $\frac{C_1 R}{Q}$.

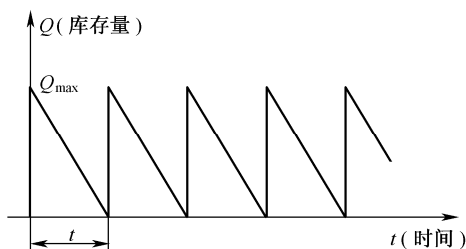


图 3.10

(2) 保管费用. 因进货周期 (两次订货间隔) T 内都是初始库存量最大, 到每个周期末库存量为零, 所以全年每天平均库存量为 $\frac{1}{2}Q$, 因此, 保管费用为

$$\frac{1}{2}QPC_2.$$

于是总费用

$$C = \frac{C_1 R}{Q} + \frac{1}{2}QPC_2.$$

由于 $C = C(Q)$, 故可用求最值法求得最优订购批量 Q^* , 最优订购次数 $\frac{R}{Q^*}$ 以及最优进货周期 T .

在经济学中, 把最优订购批量称为经济订购批量, 在经济订购批量处, 订购费用和保管费用之和即总费用最小.

例 3.6.8 某种物资一年需用量为 24000 件, 每件价格为 40 元, 年保管费率为 12%, 每次订购费用为 64 元, 试求最优订购批量、最优订购次数、最优进货周期和最小总费用 (假设产品的销售是均匀的).

解 设最优订购批量为 Q , 则订购次数为 $\frac{24000}{Q}$;

于是订购费用为 $64 \times \frac{24000}{Q}$, 保管费用为 $\frac{1}{2}Q \times 40 \times 0.12$;

从而总费用 $C = C(Q) = 64 \times \frac{24000}{Q} + \frac{1}{2}Q \times 40 \times 0.12$

$$C'(Q) = -\frac{64 \times 24000}{Q^2} + 20 \times 0.12,$$

$$C''(Q) = \frac{2 \times 64 \times 24000}{Q^3}$$

$$\text{令 } C'(Q) = 0, \text{ 得 } Q = \sqrt{\frac{64 \times 24000}{20 \times 0.12}} = 800 \text{ (件/批)}$$

$$\text{又因为 } C''(800) > 0$$

于是当 $Q = 800$ 件时总费用最低, 从而

$$\text{最优订货批量 } Q^* = 800 \text{ (件/批)}$$

$$\text{最优订货批次 } \frac{24000}{800} = 30 \text{ (批/年)}$$

$$\text{最优进货周期 } \frac{360}{30} = 12 \text{ 天 (全年按 360 天计)}$$

$$\text{最小进货总费用 } C_{\min} = C(800) = 3840 \text{ (元)}.$$

3.6.2 函数的相对变化率——函数的弹性

1. 函数的弹性

前面所谈的函数改变量与函数变化率属于绝对改变量与绝对变化率. 我们在实践中可以体会到仅仅研究函数的绝对改变量与绝对变化率是不够的. 例如, 商品甲每单位价格为 10 元, 涨价 1 元; 商品乙每单位价格为 1000 元, 也涨价 1 元. 两种商品的绝对改变量都是 1 元, 但各与原价格相比两者涨价的百分比却有很大的不同, 商品甲涨了 10%, 而商品乙仅涨了 0.1%. 因此我们还有必要研究函数的相对改变量与相对变化率.

例如, 对于 $y = x^2$, 当 x 由 10 改变到 12 时, y 由 100 改变到 144, 此时自变量与因变量的绝对改变量分别为 $\Delta x = 2$, $\Delta y = 44$, 而 $\frac{\Delta x}{x} = 20\%$, $\frac{\Delta y}{y} = 44\%$. 这表明当 x 从 10 改变到 12 时, x 产生了 20% 的改变, y 产生了 44% 的改变, 这就是相对改变量.

$$\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \frac{44\%}{20\%} = 2.2$$

这表明在 (10, 12) 内, x 改变 1% 时, y 平均改变 2.2%, 我们称它为从 $x = 10$ 到 $x = 12$, 函数 $y = x^2$ 的平均相对变化率.

定义 3.6.2 设函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导, 函数的相对改变量

$$\frac{\Delta y}{y_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}$$

与自变量的相对改变量 $\frac{\Delta x}{x_0}$ 之比 $\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ 称为函数从 $x = x_0$ 到 $x = x_0 + \Delta x$ 两点间的相

对变化率, 或称两点间的弹性. 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ 的极限称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的相对导数, 也就是相对变化率, 或称弹性.

记作 $\left. \frac{Ey}{Ex} \right|_{x=x_0}$ 或 $\frac{Ef(x_0)}{Ex_0}$,

即 $\left. \frac{Ey}{Ex} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{y_0} = f'(x_0) \frac{x_0}{f(x_0)}$

当 x_0 为定值时, $\left. \frac{Ey}{Ex} \right|_{x=x_0}$ 为定值.

对一般的 x , 若 $f(x)$ 可导, 则有

$$\frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = y' \frac{x}{y}$$

是 x 的函数, 称为 $f(x)$ 的弹性函数.

函数 $f(x)$ 在 x 点的弹性 $\frac{E}{Ex} f(x)$ 反应了随着 x 的变化 $f(x)$ 变化的幅度的大小, 也就是 $f(x)$ 对 x 变化反应的强烈程度或灵敏度.

$\frac{E}{Ex} f(x_0)$ 表示在点 $x = x_0$ 处, 当 x 产生 1% 的改变时, $f(x)$ 近似地改变

$\frac{E}{Ex} f(x_0)\%$, 在应用问题中解释弹性的具体意义时, 略去“近似”二字.

注意: 两点间的弹性是有方向的, 因为这里的“相对性”是针对初始值而言的.

例 3.6.9 求函数 $y = 3 + 2x$ 在 $x = 3$ 处的弹性.

解 $y' = 2$

$$\frac{Ey}{Ex} = y' \frac{x}{y} = \frac{2x}{3+2x}, \quad \left. \frac{Ey}{Ex} \right|_{x=3} = \frac{2 \times 3}{3+2 \times 3} = \frac{2}{3}$$

例 3.6.10 求幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为常数) 的弹性函数.

解 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$$\frac{Ey}{Ex} = \alpha x^{\alpha-1} \cdot \frac{x}{x^\alpha} = \alpha$$

可以看到, 幂函数的弹性函数为常数, 即在任意点处弹性不变, 所以称为不变弹性函数.

2. 需求弹性与供给弹性

(1) 需求弹性.

“需求”是指在一定的价格条件下, 消费者愿意购买并且有能力购买的商品量. 通常需求是价格的函数, P 表示商品的价格, Q 表示需求量, $Q = f(P)$ 称为

需求函数.

一般而言, 商品价格低, 需求大, 商品价格高, 需求小. 因而一般需求函数 $Q = f(P)$ 是单调减少函数.

定义 3.6.3 设某商品的需求函数 $Q = f(P)$ 在 P 处可导, 称 $-\frac{EQ}{EP} = -f'(P)\frac{P}{Q}$ 为商品在价格为 P 时的需求价格弹性, 或简称需求弹性. 记为 η , 即

$$\eta = -\frac{EQ}{EP} = -f'(P)\frac{P}{Q}.$$

需求弹性可以衡量需求的相对变动对价格相对变动的反应程度.

例 3.6.11 已知某商品的需求函数 $Q = e^{-\frac{P}{10}}$, 求 $P = 5$, $P = 10$, $P = 15$ 时的需求弹性并说明其意义.

解 $Q' = f'(P) = -\frac{1}{10}e^{-\frac{P}{10}}$, 需求弹性为

$$\eta(P) = \frac{1}{10}e^{-\frac{P}{10}} \frac{P}{e^{-\frac{P}{10}}} = \frac{P}{10}.$$

$\eta(5) = 0.5$, 说明 $P = 5$ 时, 价格上涨 1%, 需求量减少 0.5%.

$\eta(10) = 1$, 说明 $P = 10$ 时, 价格与需求的变动幅度相同.

$\eta(15) = 1.5$, 说明 $P = 15$ 时, 价格上涨 1%, 需求量减少 1.5%.

由此例可以看出, 当 $\eta < 1$ 时, 需求的变动幅度小于价格的变动幅度; 当 $\eta = 1$ 时, 需求的变动幅度等于价格的变动幅度; 当 $\eta > 1$ 时, 需求的变动幅度大于价格的变动幅度.

(2) 供给弹性.

“供给”是指在一定价格条件下, 生产者愿意出售并且可供出售的商品量. 通常供给是价格的函数, P 表示商品的价格, Q 表示供给量, $Q = \varphi(P)$ 称为供给函数.

一般而言, 商品价格低, 生产者不愿生产, 供给少; 商品价格高, 供给多. 因而一般供给函数为商品价格的单调增加函数.

一般用 D 表示需求曲线, 用 S 表示供给曲线, 如图 3.11 所示.

定义 3.6.4 设某商品的供给函数 $Q = \varphi(P)$ 在 P 处可导, 称 $\frac{EQ}{EP} = \varphi'(P)\frac{P}{Q}$ 为商品在价格为 P 的供给弹性, 记作 $\varepsilon(P)$, 即

$$\varepsilon(P) = \frac{EQ}{EP} = \varphi'(P)\frac{P}{Q}.$$

(3) 均衡价格.

均衡价格是市场上的需求量与供给量相等时的价格, 在图 3.12 中表示为在需

求曲线 D 与供给曲线 S 相交点 E 处的横坐标 $P = P_0$ ，此时需求量与供给量均为 Q_0 ，称为均衡商品量。

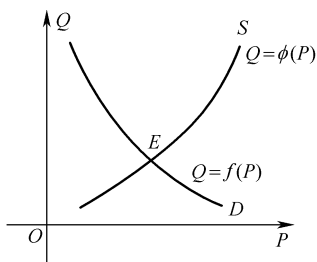


图 3.11

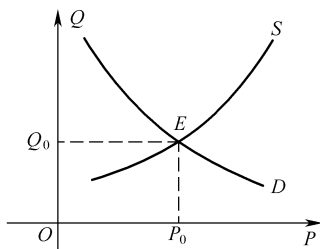


图 3.12

当 $P < P_0$ 时，如图 3.13 中 $P = P_1$ 处，此时消费者希望购买的商品量为 Q_D ，生产者愿意出卖的商品量为 Q_S ， $Q_S < Q_D$ ，市场上出现供不应求的情况，商品短缺，会形成抢购、黑市等情况。这种状况不会持久，必然导致价格上涨， P 增加。

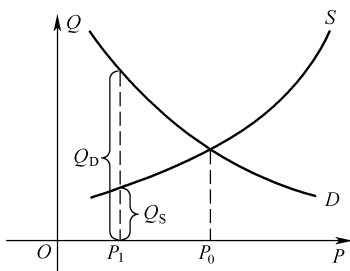


图 3.13

当 $P > P_0$ 时，如图 3.14 中 $P = P_2$ 处，此时 $Q_D < Q_S$ ，市场上出现供过于求的情况，商品滞销。这种状况也不会持久，必然导致价格下跌， P 减小。

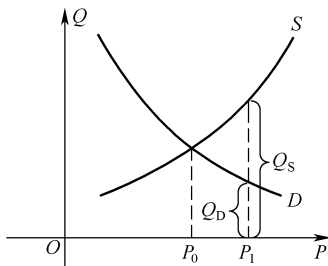


图 3.14

总之，市场上商品价格将围绕均衡价格波动。

例 3.6.12 设某商品的需求函数 $Q = b - aP$ ($a, b > 0$)，供给函数为 $Q = cP - d$ ，

($c, d > 0$), 求均衡价格 P_0 .

解 由 $b - aP_0 = cP_0 - d$ 解得 $P_0 = \frac{b+d}{a+c}$.

3. 边际收益与需求弹性的关系

由于 $R = PQ = Pf(P)$, 而边际收益

$$R' = f(P) + Pf'(P) = f(P) \left[1 + \frac{Pf'(P)}{f(P)} \right] = f(P)[1 - \eta(P)].$$

由此可知, 当 $\eta(P) < 1$ 时, $R' > 0$, R 递增, 即价格上涨会使总收益增加; 价格下跌会使总收益减少.

当 $\eta(P) = 1$ 时, $R' = 0$, R 取得最大值.

当 $\eta(P) > 1$ 时, $R' < 0$, R 递减, 即价格上涨会使总收益减少, 而价格下跌会使总收益增加.

在经济学中, 将 $\eta(P) < 1$ 的商品称为缺乏弹性商品, 将 $\eta(P) = 1$ 的商品称为单位弹性商品, 而将 $\eta(P) > 1$ 的商品称为富有弹性商品.

*习题 3.6

1. 某化工厂日产能力为 1000 吨, 每日产品的总成本 C (单位: 元) 是日产量 x (单位: 吨) 的函数

$$C = C(x) = 100 + 7x + 50\sqrt{x} \quad x \in [0, 1000],$$

(1) 求当日产量为 100 吨时的边际成本;

(2) 求当日产量为 100 吨时的平均单位成本.

2. 某产品生产 x 单位的总成本 C 为 x 的函数

$$C = C(x) = 1100 + \frac{1}{1200}x^2,$$

(1) 求生产 900 单位时的总成本和平均单位成本;

(2) 求生产 900 到 1000 单位时总成本的平均变化率;

(3) 求生产 900 单位和 1000 单位时的边际成本.

3. 设某产品生产 x 单位的总收益 R 为 x 的函数

$$R = R(x) = 200x - 0.01x^2,$$

求生产 50 单位产品时的总收益及平均单位产品的收益和边际收益.

4. 若生产某种商品 x 单位的利润是 $L(x) = 5000 + x - 0.00001x^2$ (元), 问生产多少单位时, 获得的利润最大?

5. 某厂每批生产某种商品 x 单位的费用为 $C(x) = 5x + 200$ (元), 得到的收益是 $R(x) = 10x - 0.01x^2$ (元), 问每批应生产多少单位时才能使利润最大?

6. 某商品的价格 P 与需求量 Q 的关系为 $P=10-\frac{Q}{5}$,

(1) 求需求量为 20 及 30 时的总收益 R , 平均收益 $\bar{R}$ 及边际收益 R' ;

(2) 当 Q 为多少时, 总收益最大?

7. 某商品的成本函数为 $C=15Q-6Q^2+Q^3$,

(1) 生产量为多少时, 可使平均成本最小?

(2) 求出边际成本, 并验证当平均成本最小时, 边际成本等于平均成本.

8. 某厂生产 B 产品, 其年销售量为 100 万件, 每批生产需增加生产准备费 1000 元, 而每件库存费为 0.05 元, 如果产销量是均匀的 (此时商品的平均库存量为批量的一半), 问应分几批生产才能使生产准备费及库存费之和为最小?

9. 某公司年销售某商品 5000 台, 每次进货费用为 40 元, 单价为 200 元, 年保管费用率为 20%, 求经济订购批量 (即最优订购批量).

10. 某厂全年生产需用甲材料 5170 吨, 每次订购费用为 570 元, 每吨甲材料单价及库存保管费用率分别为 600 元、14.2%, 试求:

(1) 最优订购批量;

(2) 最优订购批次;

(3) 最优进货周期;

(4) 最小总费用.

本章小结

1. 中值定理

主要应掌握罗尔定理和拉格朗日中值定理的条件和结论, 定理的结论是在区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ 满足定理. 利用罗尔定理可以证明 $f'(x)=0$ 有根; 利用拉格朗日中值定理和柯西中值定理可以证明等式和不等式. 使用的关键是从要证明的结果出发构造合适的函数.

2. 洛必达法则——用于求未定式的极限

若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 而且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (或 ∞), 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

要注意使用的条件, 此外洛必达法则的条件是充分条件而不是必要条件.

对于其他形式的未定式, 要转化后才能使用洛必达法则.

3. 利用导数求函数的单调区间和极值

(1) 函数的单调区间.

如果在某区间内 $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 单调增加, 如果在该区间内 $f'(x) < 0$,

则函数 $f(x)$ 单调减少.

(2) 函数的极值.

极值包括极大值和极小值, 是局部概念.

可能的极值点包括函数的驻点和不可导点, 可导函数的极值点必为驻点.

设 x_0 是函数的可能的极值点, 而函数在 x_0 的一个空心邻域内可导, 那么:

- 1) 若 x_0 两侧导数符号为左正右负, 则 x_0 是极大值点;
- 2) 若 x_0 两侧导数符号为左负右正, 则 x_0 是极小值点;
- 3) 若 x_0 两侧导数符号不变, 则 x_0 不是极值点.

也可以用二阶导数的符号来判断: 设 $f'(x_0) = 0$, 若 $f''(x_0) < 0$, 则函数在 x_0 处取极大值; 若 $f''(x_0) > 0$, 则函数在 x_0 处取极小值. 但这种方法只适合讨论二阶导数不为零的驻点是否为极值点.

(3) 函数的最大值和最小值.

闭区间上连续函数的可能最值点包括在相应的开区间内 $f'(x) = 0$ 、 $f'(x)$ 不存在的点和区间的端点.

若区间内驻点唯一且为极值点, 则该极值点为相应的最值点.

在实际问题中若最值存在, 则唯一的驻点就是所求的最值点.

4. 曲线的凹凸区间和拐点.

在某个区间内, 若 $f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 是凹的; 在某个区间内, 若 $f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 是凸的; 曲线凹凸区间的分界点为曲线的拐点.

5. 曲线的渐近线.

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, 则称直线 $y = a$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线; 若 $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$, 则称直线 $x = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条垂直渐近线.

6. 在以上各问题讨论的基础上, 可通过列表、画图绘制出函数图形.

复习题 3

1. 不求函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数, 说明方程 $f'(x) = 0$ 有几个根? 并指出它们所在的区间.

2. 设在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0)$, $f'(1)$, $f(1) - f(0)$ 和 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序为 ().

- A. $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$ B. $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$
C. $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$ D. $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

3. 证明多项式 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 在 $[0, 1]$ 上不可能有两个零点.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) + f'(\xi) = e^{-\xi} [f(1)e - f(0)]$.

5. 证明下列不等式:

(1) $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$;

(2) 当 $x \neq 0$ 时, $e^x > 1 + x$;

(3) 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x$.

6. 利用洛必达法则求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin x - \sin 2x - \sin 3x}{x^3}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1+x)}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2^x + 3^x) - \ln 2}{x}$; (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x$.

7. 求下列函数的单调区间和极值:

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$; (2) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2} \ln x$;

(3) $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$.

8. 从半径为 R 的圆形铁片中剪去一个扇形, 将剩余部分围成一个圆锥形漏斗, 问剪去的扇形的圆心角多大时, 才能使圆锥形漏斗的容积最大?

9. 商店销售某商品的价格为 $p(x) = e^{-x}$ (x 为销售量), 求收入最大时的价格.

10. 确定下列曲线的凹凸区间与拐点:

(1) $f(x) = x^3 - x^4$; (2) $f(x) = xe^{-x}$;

(3) $f(x) = 3x^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}x^2$; (4) $f(x) = x^2 + 2 \ln x$.

11. 描绘下列函数的图形:

(1) $y = x + e^{-x}$; (2) $y = \frac{x^2}{1+x}$;

(3) $y = \ln(1+x^2)$.

自测题 3

1. 填空题

(1) 函数 $f(x) = (x-1)^2$ 在 $[0, 2]$ 上满足罗尔定理的条件, 当 $\xi =$ _____ 时, $f'(\xi) = 0$;

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 则至少存在一点 $\xi \in (0, 2)$ 使 $f'(\xi) =$ _____;

(3) 函数的极值点可能是 _____ 点和 _____ 点;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \underline{\hspace{2cm}};$

(5) $y = x^2 - 2\ln x$ 的单调增区间为_____;

(6) 函数 $y = x \cdot 2^x$ 取极小值的点是_____;

(7) 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ 的拐点为 _____ ;

(8) 曲线 $y = \frac{e^{-x}}{x}$ 的水平渐近线为_____，垂直渐近线为_____.

2. 单选题

(1) 曲线 $y = x^2(x-6)$ 在区间 $(4, +\infty)$ 内 ().

A. 单调增加且凸

B. 单调增加且凹

C. 单调减少且凸

D. 单调减少且凹

(2) 如果 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ ，则下列结论中正确的是 ().

A. x_0 是极大值点

B. $(x_0, f(x_0))$ 是拐点

C. x_0 是极小值点

D. 可能 x_0 是极值点, 也可能 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点

(3) 已知 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数, 且 (), 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增凸.

A. $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

B. $f'(x) > 0, f''(x) < 0$

C. $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

D. $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

(4) 方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 内的实根个数为 ().

A. 0

B. 2

C. 1

D. 无法确定

(5) 设 $f(x) = \frac{x}{3-x}$, 则曲线 $y = f(x)$ ().

A. 仅有水平渐近线

B. 仅有垂直渐近线

C. 既有水平渐近线又有垂直渐近线

D. 无渐近线

(6) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=1$, $f(1)=0$, 则在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 ().

A. $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$

B. $f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi}$

C. $f(\xi) = -\frac{f'(\xi)}{\xi}$

D. $f(\xi) = \frac{f'(\xi)}{\xi}$

8. 证明.

(1) 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$;

(2) 当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$;

(3) 当 $x \neq 0$ 时, $e^x - 1 > x$;

(4) 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^2}{2} < \sin x < x$.

9. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

(1) 存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(2) 存在两个不同的 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.