第三章　微分中值定理与导数的应用

上一章我们讨论了导数的概念和计算方法．本章将介绍微分中值定理，并利用这些定理进一步研究导数的应用．

第一节　微分中值定理

本节先介绍罗尔定理，并由此推出拉格朗日中值定理和柯西中值定理．

一、罗尔定理

定理 1（罗尔定理）　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且在区间两端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$．则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$．

罗尔定理的几何意义是：在每点都有切线的一段曲线上，若两端点的高度相同，则在该曲线上至少存在一条水平切线（如图 3-1 所示）．

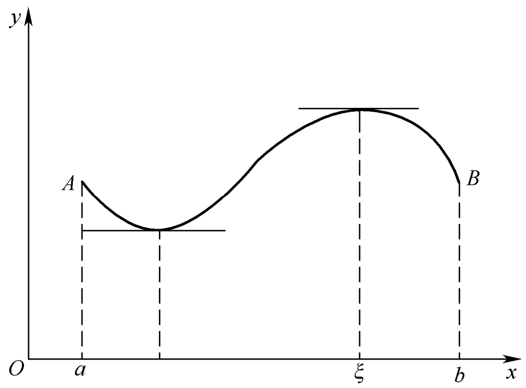

图 3-1

注意：罗尔定理中的三个条件是同等重要的，有一个不满足，定理的结论就可能不成立．

例 1　不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间．

解　对于多项式函数 $f(x)$，显然是一个连续可导函数，且 $f(1)=f(2)=f(3)=0$，所以 $f(x)$ 在[1,2]，[2,3]上都满足罗尔定理的条件，因此存在 $\xi_1\in(1,2)$，$\xi_2\in(2,3)$，使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，即方程 $f'(x)=0$ 至少有两个实根 $\xi_i(i=1,2)$．又 $f'(x)=0$ 是二次方程，它至多有两个不同的实根，而 $\xi_1<\xi_2$，它们不相等．所以方程 $f'(x)=0$ 有且仅有两个实根，分别位于区间(1,2)和(2,3)内．

二、拉格朗日中值定理

定理 2（拉格朗日中值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

可以看出，罗尔定理是拉格朗日定理当 $f(a)=f(b)$ 时的特殊情形，而拉格朗日定理即罗尔定理的推广．因此，只需对函数 $f(x)$ 作适当变形，便可借助罗尔定理导出拉格朗日中值定理.

证 构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

显然，函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)$，满足罗尔定理条件．于是，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

于是

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

拉格朗日中值定理的几何意义是：在每点都有切线的一段曲线上至少存在一点 $P(\xi,f(\xi))$，曲线在该点的切线平行于两端点的连线（如图 3-2 所示）.

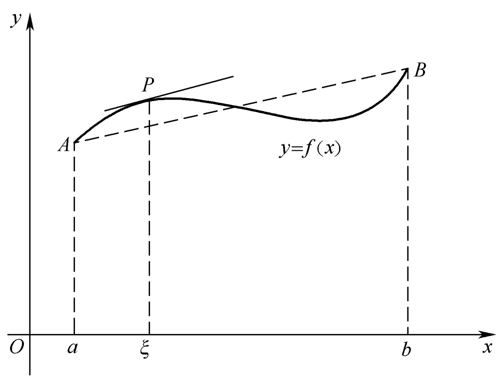

图 3-2

由拉格朗日中值定理，可得如下推论.

推论 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内，恒有 $f'(x)=0$，则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内恒等于常数.

事实上，对于 (a,b) 内的任意两点 x_1,x_2（不妨设 $x_1<x_2$），由拉格朗日中值定理可知，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0,$$

所以

$$f(x_1)=f(x_2).$$

由 x_1,x_2 的任意性可知，$f(x)$ 在 (a,b) 内恒等于常数.

例 2 验证函数 $f(x)=x-x^3$ 在区间 $[-2,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，并求 ξ 的值.

解 显然 $f(x)$ 在 $[-2,1]$ 上连续，在 $(-2,1)$ 内可导，定理条件满足，且

$$f'(x)=1-3x^2$$

所以在 $(-2,1)$ 内存在 ξ ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)},$$

即 $$1-3\xi^2=\frac{0-6}{3}，解得\ \xi=\pm1.$$

则在 $(-2,1)$ 内，$\xi=-1$ 即为所求（$\xi=1$ 舍去）.

三、柯西中值定理

定理 3（柯西中值定理） 如果函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；在开区间 (a,b) 内可导，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 内的每一点处均不为零. 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$$

在柯西中值定理中，若取 $F(x)=x$，则得到拉格朗日中值定理. 因此柯西中值定理可以看成是拉格朗日中值定理的推广.

习题一

1．下列函数在给定区间上是否满足罗尔定理条件？如满足，求出定理中的 ξ 值.

（1）$f(x)=x^2-2x-3,\qquad [-1,3]$

（2）$f(x)=\sin x,\qquad \left[-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

（3）$f(x)=\sqrt{x},\qquad [0,2]$

2．不求出函数 $f(x)=x^3-2x$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根？并指出它们所在的区间.

3．验证函数 $f(x)=x^2+2x-1$ 在区间 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，并求出定理中的 ξ 值.

第二节　洛必达法则

我们知道，两个无穷小量之比的极限或两个无穷大量之比的极限，有各种不同的情况.有的极限存在，有的极限不存在. 通常把它们叫做未定式的极限，并分别简记为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$. 对于这类极限，本节将介绍一种借助于导数求极限的新方法，即洛必达法则.

一、两个无穷小量之比的极限

定理 1 （洛必达法则） 设函数 $\boldsymbol{f(x)}$、$\boldsymbol{g(x)}$ 在点 $\boldsymbol{x_0}$ 的某个去心邻域内有定义，若

（1）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$；

（2）$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$（或 ∞），则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{（或}\infty\text{）}.$$

在定理 1 中，如果将 $x \to x_0$ 换为 $x \to \infty$（或其他情形）时，结论也成立.

例 1 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$.

解 这是$\dfrac{0}{0}$型未定式，由洛必达法则得

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x(1+x)} = \infty.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

解 这也是$\dfrac{0}{0}$型未定式，由洛必达法则得

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}.$$

例 3 求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$

解 $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

可以看出，应用洛必达法则后一般要进行化简，如果仍然出现未定式，可继续应用洛必达法则.

二、两个无穷大量之比的极限

定理 2（洛必达法则）设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，若

（1）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$；

（2）$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$（或 ∞），则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{（或}\infty\text{）}.$$

在定理 2 中，如果将 $x \to x_0$ 换为 $x \to \infty$（或其他情形）时，结论也成立.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}$.

解 这是$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式，由洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\cos x\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}=1\,.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$（$n$ 为正整数）.

解 这也是$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式，连续运用洛必达法则 n 次得

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to +\infty}\frac{n!}{e^x}=0\,.$$

三、其他未定式的极限

除了上面讲的$\dfrac{0}{0}$和$\dfrac{\infty}{\infty}$两种未定式外，有时还会遇到$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^∞，0^0，∞^0等类型的未定式的极限．一般地，这些类型的未定式通过适当变形总可以化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，然后再用洛必达法则求其极限.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$.

解 这是一个$0\cdot\infty$型未定式的极限，先将其转化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式，而后利用洛必达法则.

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0\,.$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

解 这是一个$\infty-\infty$型未定式的极限，将两个分式通分化成$\dfrac{0}{0}$型未定式，而后利用洛必达法则.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

例 8 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

解 这是一个0^0型未定式极限．令 $y=x^x$，则

$$\ln y=x\ln x\,,$$

所以

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$$（见例 6），即

$\ln y\to0(x\to0^+)$，于是

$y\to1(x\to0^+)$，即

$$\lim_{x\to0^+}x^x=1.$$

应该指出，如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时（极限为∞除外），就不能应用洛必达法则. 但极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可能存在.

例如，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}\sin x}{1-\frac{1}{x}\sin x}=1$.

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ 的极限不存在.

习题二

1．用洛必达法则求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+6x+5}$　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{\tan 3x}$　　（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

（5）$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cot x}{\ln x}$　　（6）$\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$

（7）$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$　　（8）$\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\sin x}$

（9）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$

2．验证 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛必达法则计算出来.

第三节　函数的单调性

我们在第一章已经介绍了函数的单调性，下面介绍利用导数来研究函数的单调性.

定理　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 若

（1）在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

（2）在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

证　设 x_1,x_2 是 $[a,b]$ 上任意两点，且 $x_1<x_2$，由拉格朗日中值定理有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \qquad (x_1<\xi<x_2).$$

如果 $f'(x)>0$，则有 $f'(\xi)>0$，又 $x_2-x_1>0$，所以有 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即

$$f(x_1)<f(x_2),$$

由 x_1，x_2 的任意性，知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

同理可证，若 $f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

显然，定理 1 中的闭区间 $[a,b]$ 若为开区间 (a,b) 或无限区间，结论也成立.

说明：当函数在某区间内，仅个别点处的导数为零或不存在，而在其余各点处导数均大于（或小于）零时，此函数在该区间仍是单调增加（或减少）的．例如幂函数 $y=x^3$ 的导数，$y'=3x^2$，仅当 $x=0$ 时，$y'=0$，而当 $x\neq 0$ 时，$y'>0$，所以 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

例 1 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解 （1）函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

（2）$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=1,\ x=2$，它们将定义域分为三个子区间：$(-\infty,1),\ (1,2),\ (2,+\infty)$．列表分析如表 3-1 所示.

表 3-1

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	连续	↘	连续	↗

由定理 1，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 及 $[2,+\infty)$ 内，单调增加；在 $[1,2]$ 内，单调减少.

例 2 确定函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

解 （1）函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

（2）$f'(x)==\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}$，当 $x=0$ 时 $f'(x)$ 不存在，点 $x=0$ 将定义域分为两个子区间：$(-\infty,0),\ (0,+\infty)$．列表分析如表 3-2 所示.

表 3-2

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	−	不存在	+
y	↘	连续	↗

由定理 1，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 内，单调减少；在 $[0,+\infty]$ 内，单调增加.

根据上面两个例题可得出确定某个函数的单调性的一般步骤是：

（1）确定函数的定义域；

（2）求出使 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$ 不存在的点，并以这些点为分界点，将定义域分成若干个子区间；

（3）确定 $f'(x)$ 在各个子区间的符号，从而判定出 $f(x)$ 的单调性.

例 3 证明当 $x>0$ 时，$x>\ln(1+x)$.

证 设 $f(x)=x-\ln(1+x)$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=0$.在 $(0,+\infty)$ 内，有

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上单调增加，从而当 $x>0$ 时，有

$$f(x)=x-\ln(1+x)>f(0)=0\text{，即}$$

$$x>\ln(1+x)$$

习题三

1．确定下列函数的单调区间.

（1）$y=x^3-12x$　　（2）$y=\mathrm{e}^x-x-1$

（3）$y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$　　（4）$y=2x^2-\ln x$

2．证明下列不等式.

（1）$\mathrm{e}^x>1+x$（$x>0$）

（2）$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$（$x\geqslant 0$）

3．证明方程 $x^3+x^2+2x-1=0$ 在(0,1)内有且只有一个实根.

第四节　函数的极值与最值

在实际应用中，常常会遇到在一定条件下怎样使成本最低、利润最大、效率最高、性能最好、进程最快等问题，这类问题在数学上常可归结为求函数在给定区间上的最大值或最小值问题，这里统称为最值问题．本节将介绍函数的极值问题与最值问题.

一、函数的极值及其求法

定义 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，如果对于该邻域内异于 x_0 的任意点 x，都有

（1）$f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**极大值**，并称 x_0 为 $f(x)$ 的**极大值点**;

（2）$f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**极小值**，并称 x_0 为 $f(x)$ 的**极小值点**.

函数的极大值、极小值统称为函数的**极值**，极大值点、极小值点统称为**极值点**.

由定义可知，函数的极值是一个局部概念．一个函数在所给的区间上可以有若干个极大值或极小值，而且极大值不一定比极小值大．如图 3-3 中，函数 $f(x)$ 在点 x_1 和点 x_3 处取得极大值，在点 x_2 和点 x_4 处取得极小值，且极小值 $f(x_4)$ 大于极大值 $f(x_1)$.

从图 3-3 中可看出，在函数的极值点处，如果函数是可导的，则有 $f'(x)=0$．如当 $x=x_1$，$x=x_2$，$x=x_3$ 时，有 $f'(x)=0$．而在 $x=x_4$ 处，$f(x)$ 不可导．我们还注意到，$f'(x_5)=0$，但 x_5 却不是极值点．下面给出函数取得极值的必要条件.

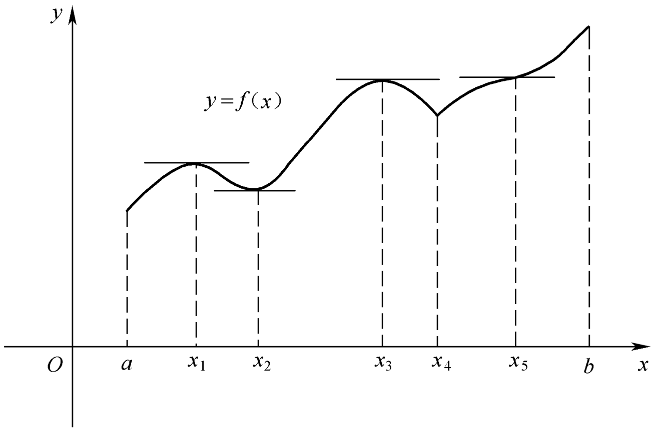

图 3-3

定理 1（必要条件） 若函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$.

使导数 $f'(x)=0$ 的点称为函数 $f(x)$ 的驻点．定理 1 说明，可导函数的极值点必是它的驻点．但是，函数的驻点不一定是它的极值点．

例如，$x=0$ 是函数 $f(x)=x^3$ 的驻点而不是它的极值点．

另外，函数不可导的点，仍有可能是极值点．例如，函数 $f(x)=|x|$，$x=0$ 是极值点，但在该点处，函数的导数不存在．如何判断所求函数的驻点和不可导点是否为函数的极值点，如果是，其函数值是极大值还是极小值呢？下面给出判断极值的两个充分条件．

定理 2（极值存在的第一充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，且在 x_0 的某一去心邻域内可导．则

（1）若当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；而当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值.

（2）若当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$；而当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

（3）若当 x 从 x_0 的左侧变化到右侧时，$f'(x)$ 不变号，则 $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值.

如图 3-3 所示，当 x 渐增地经过 x_1 时，$f'(x)$ 的符号由正变负，函数 $f(x)$ 在 x_1 处取得极大值；当 x 渐增地经过 x_2 时，$f'(x)$ 的符号由负变正，函数 $f(x)$ 在 x_2 处取得极小值；而当 x 渐增地经过 x_5 时，$f'(x)$ 的符号并未改变，则函数 $f(x)$ 在 x_5 处没有极值.

根据上面的两个定理，我们可以得到求函数 $f(x)$ 极值的步骤如下：

（1）求出 $f(x)$ 的定义域;

（2）求出导数 $f'(x)$；

（3）求出 $f(x)$ 的全部驻点及一阶导数不存在的点;

（4）用驻点和导数不存在的点把定义域划分为若干区间，考察每个区间内 $f'(x)$ 的符号，利用定理 2 确定是否是极值点，是极大值点还是极小值点；

（5）求出各极值点的函数值，即得到函数 $f(x)$ 的全部极值.

例 1 求函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 的极值和单调区间（河北省 2001 年专接本考题）.

解 （1）$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

（2）$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$；

（3）令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=0,\ x=2$，且没有不可导的点；

（4）列表 3-3 讨论如下：

表 3-3

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	极大值 1	↘	极小值-3	↗

由上表可知，函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(0)=1$，极小值为 $f(2)=-3$. 单调增加区间为 $(-\infty,0]$，$[2,+\infty)$；单调减少区间为 $[0,2]$.

当函数 $f(x)$ 在驻点处的二阶导数存在且不为零时，也可以利用下面的定理来判定 $f(x)$ 在驻点处取得极大值还是极小值.

定理 3（极值存在的第二充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值;

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 取得极小值.

例 2 求函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的极值.

解 （1）$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

（2）$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$，$f''(x)=6(2x-3)$；

（3）令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1$，$x=2$；

当 $x=1$ 时，$f''(1)=6(2x-3)\big|_{x=1}=-6<0$，由定理 3，$x=1$ 是该函数的极大值点，极大值为 $f(1)=2$；

当 $x=2$ 时，$f''(2)=6(2x-3)\big|_{x=2}=6>0$，由定理 3，$x=2$ 是该函数的极小值点，极小值为 $f(2)=1$.

说明：如果函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 处的二阶导数 $f''(x_0)\neq 0$，那么该驻点 x_0 一定是极值点，并且可以根据二阶导数的符号来判定 $f(x_0)$ 是极大值还是极小值．但若 $f''(x_0)=0$，x_0 可能是极值点，也可能不是极值点．此时定理 3 失效，只能用定理 2 来判断.

二、函数的最大值和最小值

由函数的极值定义知道，极值是局部性概念．而函数的最大值与最小值则是对整个定义域或指定区间而言的．前面曾指出：闭区间上的连续函数一定存在最大值和最小值．由上面讨论可知，函数 $f(x)$ 的最大值与最小值只可能在 $[a,b]$ 的端点或 (a,b) 内的极值点处取得，而只有驻点和不可导点有可能是极值点．因此，求函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值，可按如下步骤进行：

（1）求出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的所有驻点和不可导点；

（2）求出各驻点、不可导点及区间端点处的函数值；

（3）比较上述各函数值的大小，其中最大者即为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，最小者为最小值.

例 3 求 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值与最小值.

解 $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$，

令 $f'(x)=0$，得驻点 x=1，x=−2（舍去）.

由于 $f(1)=-6,\ f(-1)=14$，$f(2)=5$，所以函数 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值为 $f(-1)=14$，最小值为 $f(1)=-6$.

例 4 从一块边长为 a 的正方形铁皮的四角上截去同样大小的正方形（见图 3-4），然后沿虚线把四边折起来做成一个无盖的盒子，问要截去多大的小方块，可使盒子的容积最大？

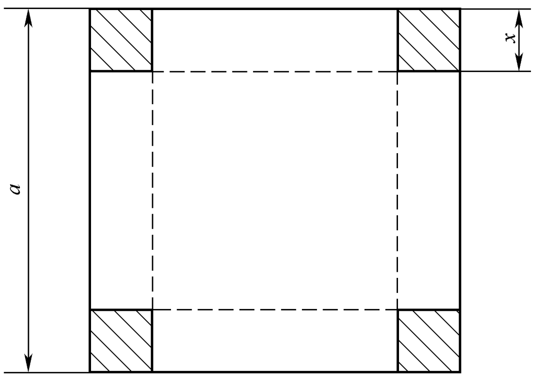

图 3-4

解 设所截小正方形的边长为 x，则折成盒子的容积为

$$V=x(a-2x)^2\ ,\ x\in\left(0,\frac{a}{2}\right),$$

$$V'=2(a-2x)(-2)x+(a-2x)^2=(a-2x)(a-6x).$$

令 $V'=0$，在区间 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 内，只有一个驻点 $x=\frac{a}{6}$，

$$V''=-2(a-6x)-6(a-2x)=24x-8a\ ,\ V''\left(\frac{a}{6}\right)=-4a<0.$$

所以，当 $x=\frac{a}{6}$ 时，V 有最大值，即从四角各截去一边长为 $\frac{a}{6}$ 的小正方形，可使盒子的容积最大.

例 5 某工厂每月生产 q（吨）产品的总成本 C（千元）是产量 q 的函数

$$C(q)=q^2-20q+30,$$

如果每吨产品销售价格为 1 万元，求达到最大利润时的月产量.

解 每月生产 q 吨时的收入函数为

$$R(q)=10q.$$

则生产 q 吨时的利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q)=10q-(q^2-20q+30)=-q^2+30q-30,$$

$L'(q)=-2q+30$，令 $L'(q)=0$，解得 q =15.

$L''(15)=-2<0$，所以当 q =15 时，函数达到最大值. 即月产量为 15 吨时利润最大.

特别指出：在实际应用问题中，如果函数 $f(x)$ 在某区间内可导且只有一个驻点 x_0，又根

据实际问题本身可知，$f(x)$ 的最大值（或最小值）一定存在，则可断定此驻点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$ 是实际问题所要求的最大值（或最小值）.

例 6 某出版社将要出版一本科技书，已知这本书的每页纸张面积为 600cm^2，要求上下各留 3cm、左右各留 2cm 的空间，试问纸张的宽和高是多少时，使每页纸面安排的印刷内容最多？

解 设纸张的宽为 x，则高为 $\dfrac{600}{x}$，于是每页纸张的面积为

$$s=(x-4)\left(\frac{600}{x}-6\right)=624-6x-\frac{2400}{x}，\quad x\in(4,100)$$

$s'=\dfrac{2400}{x^2}-6$，令 $s'=0$ 求得 $x=20$ 为唯一驻点，且根据问题的实际意义可知其最大值一定存在，所以当纸张的页面宽和高分别为 20cm 和 30cm 时，安排的印刷内容最多.

例 7 一稳压电源回路，电动势为 E，内阻为 r，负载电阻为 R，问如何选择 R，才能使输出功率最大？

解 由电学知识知，$I=\dfrac{E}{R+r}$，I 为电路中的电流，则输出功率为

$$P(R)=I^2R=E^2\frac{R}{(R+r)^2}\qquad（R>0）$$

所以 $P'(R)=E^2\dfrac{r-R}{(R+r)^3}$，令 $P'(R)=0$，求得 $R=r$ 为唯一的驻点．即当负载电阻与电源内阻相等时，输出功率最大.

习题四

1．求下列函数在给定区间上的最大值与最小值：

（1）$f(x)=x^3-3x^2-9x+10,\quad x\in[-2,2]$；

（2）$f(x)=x+\sqrt{1-x},\quad x\in[-5,1]$.

2．用长 6m 的铝合金料加工一日字形窗框，问它的长和宽分别为多少时，才能使窗户面积最大，最大面积是多少？

3．某水泥厂每天生产 q 吨水泥的总成本为

$$C(q)=\frac{1}{10}q^2+15q+40\ （元）$$

求其最低平均成本.

4．人在雨中行走，速度不同可能导致雨量有很大不同，即雨量是人行走速度的函数，记淋雨量为 y，行走速度为 x，并设它们之间的函数关系为 $y=x^3-6x^2+9x+4$，求其淋雨量最小时的行走速度.

5．某单位靠墙盖一间长方形小屋，现有存砖只够砌 20m 长的墙壁，问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大？

第五节　曲线的凹凸性与拐点

前面研究了函数的单调性和极值，为了准确地描绘函数的图形，还需知道函数曲线的弯曲方向及不同弯曲方向的分界点，

定义 1　若曲线 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内曲线段总位于其上任一点处切线的上方，则称曲线在 (a,b) 内是**凹的**（也称**上凹**），如图 3-5 所示；若曲线总位于其上任一点处切线的下方，则称曲线在 (a,b) 内是**凸的**（也称**下凹**），如图 3-6 所示．

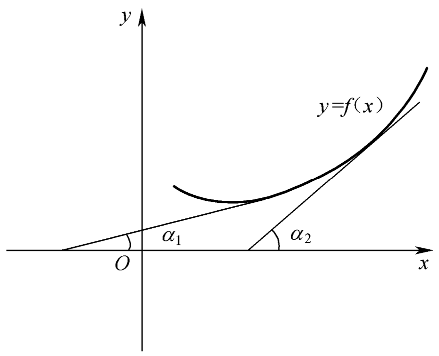

图 3-5

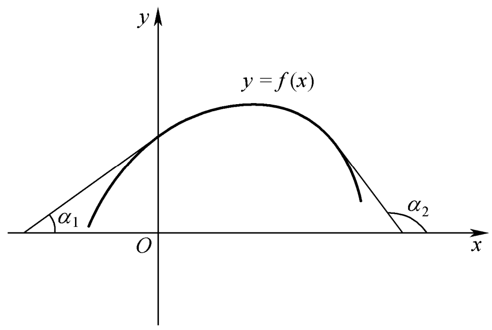

图 3-6

我们可用二阶导数来判定曲线的凹凸性．

定理　设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，则

（1）若在 (a,b) 内，$f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的；

（2）若在 (a,b) 内，$f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的．

例 1　判定曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的凹凸性．

解　因为 $y'=y''=\mathrm{e}^x>0$，所以曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的．

定义 2　曲线凹弧与凸弧的分界点称为曲线的**拐点**．

拐点是曲线凹凸的分界点，所以拐点左右附近 $f''(x)$ 必然异号．因此，曲线拐点的横坐标 x_0 只可能是使 $f''(x)=0$ 的点或 $f''(x)$ 不存在的点．因此，我们可以按下面步骤来判断曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性与拐点．

（1）确定 $y=f(x)$ 的定义域并求出函数的二阶导数 $f''(x)$；

（2）求出使 $f''(x)=0$ 的点和 $f''(x)$ 不存在的点 x_0；

（3）用上述点将定义域分成若干小区间，考查每个小区间上 $f''(x)$ 的符号，并判断凹凸性；

（4）若 $f''(x)$ 在点 x_0 两侧异号，则 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点，否则不是．

例 2　求曲线 $y=x^3-6x^2+9x+1$ 的凹凸区间与拐点．

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$y'=3x^2-12x+9,$$
$$y''=6x-12=6(x-2),$$

令 $y''=0$， $x=2$.

列表 3-4 进行讨论.

表 3-4

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
y''	-	0	+
y	⌒	拐点(2,3)	⌣

由上表可知，曲线在 $(-\infty,2]$ 上是凸的，在 $[2,+\infty)$ 上是凹的，曲线的拐点为(2,3).

例 3 求曲线 $y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$ 的凹凸区间与拐点.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$y'=\frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}}，\quad y''=-\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-4)^5}}，$$

y'' 在定义域内恒不为零. 而 $x=4$ 时，y'' 不存在.

当 $x\in(-\infty,4)$ 时， $y''>0$，函数曲线是凹的；

当 $x\in(4,+\infty)$ 时， $y''<0$，函数曲线是凸的.

又 $y(4)=2$，因此，点 $(4,2)$ 是曲线的拐点，如图 3-7 所示.

从图 3-7 中可看出，(4,2)是函数的拐点，且函数在这点处的切线垂直于 x 轴，故一阶导数与二阶导数都不存在.

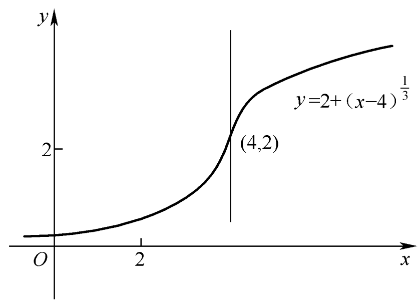

图 3-7

习题五

1．求下列函数的凹凸区间与拐点.

（1） $y=2x^3-3x^2-36x+25$　　（2） $y=(x-4)^{\frac{5}{3}}$

（3） $y=\ln(x^2+1)$　　（4） $y=x+\frac{1}{x}(x>0)$

2．证明曲线 $y=(2x-3)^4+8$ 无拐点.

3．问 a、b 为何值时，点(1,3)为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点.

第六节　函数图形的描绘

前几节我们利用导数研究了函数的单调性、极值、最值、曲线的凹凸性及拐点，这对于作函数的图形是很必要的. 但为了能够比较准确地描绘函数的图形，有时还要考虑曲线无限远离坐标原点时的变化状况，即曲线的渐近线问题.

一、曲线的水平和垂直渐近线

1．水平渐近线

定义 1 若当 $x \to \infty$（有时仅当 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$）时，函数 $f(x)$ 以常数 b 为极限，即 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$，则称直线 $y = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的**水平渐近线**.

例如，曲线 $y = \arctan x$．因为 $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$，所以直线 $y = -\dfrac{\pi}{2}$ 与 $y = \dfrac{\pi}{2}$ 都是该曲线的水平渐近线，如图 3-8 所示.

2．垂直渐近线

定义 2 若当 $x \to x_0$（有时仅当 $x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0^+$）时，函数 $f(x)$ 为无穷大量，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则称直线 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的垂直渐近线.

例 1 求曲线 $y = \dfrac{3}{x-2}$ 的渐近线.

解 因为

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3}{x-2} = 0，\quad \lim_{x \to 2} \frac{3}{x-2} = \infty$$

所以直线 $y = 0$ 和 $x = 2$ 分别为曲线的水平渐近线和垂直渐近线，如图 3-9 所示.

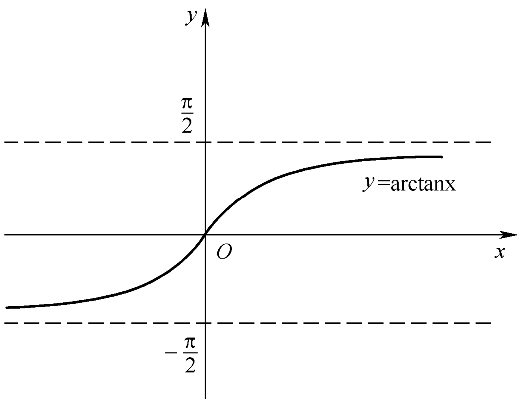

图 3-8

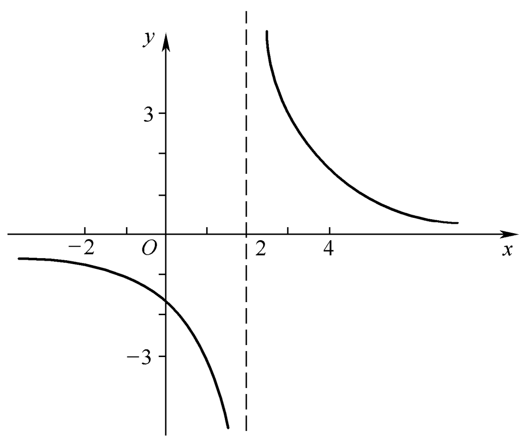

图 3-9

二、函数作图

中学里学过的描点作图法，只适用于简单的平面曲线（如直线、抛物线），但对于一般的平面曲线，由于所取的点有限，一些关键点如极值点、拐点等，就有可能漏掉，曲线的单调性、凹凸性等重要性态也难以准确地显示出来．通过前面对函数各种性态的讨论，我们可总结出描绘函数图形的步骤：

（1）确定函数的定义域，值域，并考察其奇偶性和周期性；

（2）讨论函数的单调性，极值点和极值；

（3）讨论函数图形的凹凸区间和拐点；

（4）讨论函数图形的水平渐近线和垂直渐近线；

（5）根据需要补充函数图形上的若干点（如与坐标轴的交点等）；

（6）根据讨论结果描绘函数图形.

例 2　描绘函数 $y = e^{-x^2}$ 的图形.

解　（1）定义域为 $(-\infty, +\infty)$，是偶函数，可只考虑 $x \geqslant 0$ 的情况.

（2）$y' = -2xe^{-x^2}$，令 $y' = 0$，得驻点 $x = 0$. 当 $x < 0$ 时，$y' > 0$，这时函数递增；当 $x > 0$ 时，$y' < 0$，这时函数递减，因此函数在 $x = 0$ 点达到极大值 1；

（3）$y'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$，令 $y'' = 0$，得 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y'' < 0$，这时曲线是凸的；当 $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y'' > 0$，这时曲线是凹的；

将上面结果列入表 3-5 中.

表 3-5

x	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
y'	0	−	-	-
y''	−	−	0	+
y	极大值 1	下降，凸	拐点$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$	下降，凹

（4）因为 $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x^2} = 0$，所以直线 $y = 0$ 是曲线的水平渐近线；

（5）当 $x = 0$ 时，$y = 1$，曲线过点$(0,1)$；

（6）根据上述讨论作出函数的图形，如图 3-10 所示.

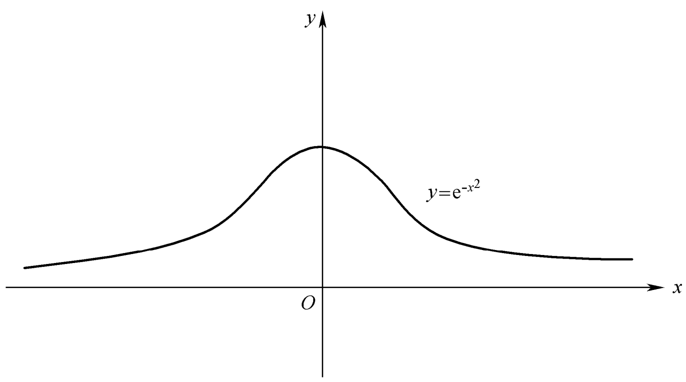

图 3-10

例 3　描绘函数 $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ 的图形.

解　（1）定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且为奇函数.

（2）$y' = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$，令 $y' = 0$，得驻点 $x = \pm 1$.

$y'' = 2x$，令 $y'' = 0$，得 $x = 0$.

（3）列表讨论，如表 3-6 所示.

表 3-6

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	上升，凸	极大值 $\frac{2}{3}$	下降，凸	拐点 $(0,0)$	下降，凹	极小值 $-\frac{2}{3}$	上升，凹

（4）曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ 无水平渐近线和垂直渐近线.

（5）补充点 $\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$，$(-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},0)$，$\left(2,\frac{2}{3}\right)$.

（6）根据上述讨论作出函数的图形，如图 3-11 所示.

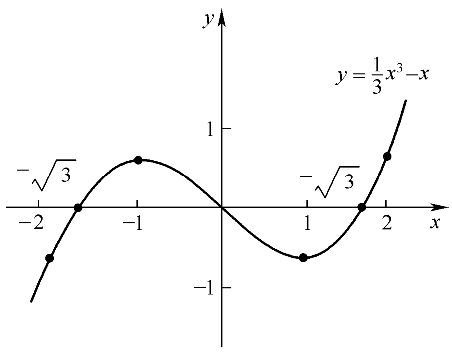

图 3-11

习题六

1．求下列曲线的渐近线.

（1）$y = 3 + \frac{1}{x}$　　　　（2）$y = \frac{3}{(x+2)^3}$

（3）$y = e^{\frac{1}{x}} - 1$　　　　（4）$y = \frac{3x^2+2}{1-x^2}$

2．讨论下列函数的性态，并作出它们的图形.

（1）$y = x^3 - x^2 - x + 1$　　　　（2）$y = 3x - x^3$

（3）$y = \ln(x^2 - 1)$　　　　（4）$y = \frac{x^2}{1+x^2}$

第七节　曲线的曲率

曲线上各处的弯曲程度是描述曲线局部性态的一个重要标志，这在工程技术和现实生活中都有重要应用，称为“曲率”.

如图 3-12 所示，考察所示平面光滑曲线，我们发现弧段 $\overset{\frown}{PQ}$ 与 $\overset{\frown}{QR}$ 的长度相差不多而弯曲程度很不一样，当动点沿曲线从点 P 移至点 Q 时，切线转过的角度比动点从点 Q 移至点 R 时转角大得多，这为我们提供了一种衡量曲线弯曲程度的方法.

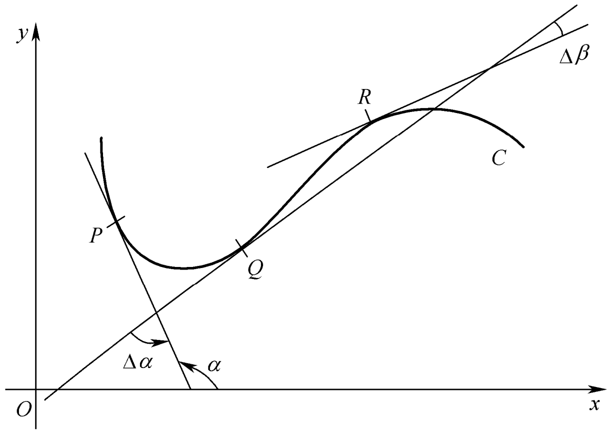

图 3-12

定义 1　设 $\alpha(t)$ 表示曲线在点 $P(x(t), y(t))$ 处切线的倾角，$\Delta\alpha = \alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)$ 表示动点由点 P 移至点 Q 时切线倾角的增量. 若 $\overset{\frown}{PQ}$ 之长为 Δs，则称 $K = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ 为弧段 $\overset{\frown}{PQ}$ 的平均曲率. 如果极限 $\boldsymbol{K} = \left|\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$ 存在，则称此极限 K 为曲线 C 在点 P 的**曲率**.

下面讨论如何计算曲率.

由于假设 C 为光滑曲线，故总有

$$\alpha(t) = \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

或

$$\alpha(t) = \arctan \frac{x'(t)}{y'(t)}$$

又若 $x(t)$、$y(t)$ 二阶可导，则由弧微分公式

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\}^{\frac{3}{2}}},$$

所以曲率公式为

$$K=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.1}$$

若曲线由 $y=f(x)$ 表示，即 $x=x$，$y=f(x)$，则 $x'=1$，$x''=0$，因此相应的曲率公式为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.2}$$

例 1 求直线 $y=ax+b$ 的曲率.

解 因为 $y'=a$，$y''=0$，所以

$$K=0,$$

即直线的弯曲程度为 0（直线不弯曲）.

例 2 求双曲线 $xy=1$ 在点(1,1)处的曲率.

解 由 $xy=1$ 得

$$y=\frac{1}{x},$$

从而 $$y'=-\frac{1}{x^2},\ y''=\frac{2}{x^3}.$$

因此， $$y'|_{x=1}=-1,\ y''|_{x=1}=2.$$

将它们代入公式（3.2），即得曲线 $xy=1$ 在点(1,1)处的曲率为

$$K=\frac{2}{[1+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

定义 2 设已知曲线 C 在其上一点 P 处的曲率 $K\neq 0$，若过点 P 作一个半径为 $\frac{1}{K}$ 的圆，使它在点 P 与曲线有相同的切线，并与曲线位于切线的同侧，如图 3-13 所示，将这个圆称为曲线在点 P 的**曲率圆**或**密切圆**，其半径 $R=\frac{1}{K}$，称为曲线在点 P 的**曲率半径**.

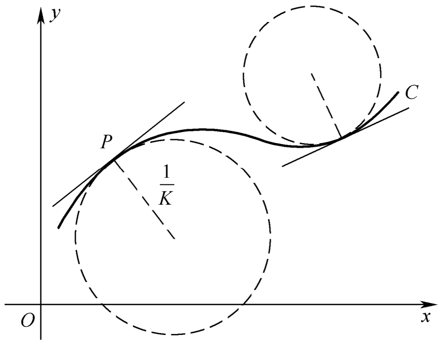

图 3-13

由曲率圆的定义可以知道，曲线在点 P 既与曲率圆有相同的切线，又与它有相同的曲率和相同的凹凸性.

例 3 设工件表面的截线为抛物线 $y=0.4x^2$，如图 3-14 所示，现拟用砂轮磨削其内表面，问选用多大直径的砂轮比较合适？

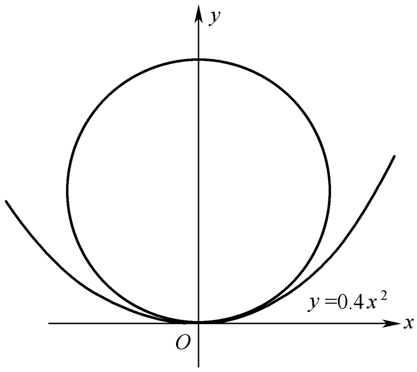

图 3-14

解 为了在磨削时不使砂轮与工件接触处附近的那部分工件磨去太多，砂轮的半径应小于或等于抛物线上各点处曲率半径中的最小值．为此，首先应计算其曲率半径的最小值，即曲率的最大值.

因为 $y'=0.8x,\ y''=0.8$，所以曲率

$$K=\frac{0.8}{(1+0.64x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot$$

欲使曲率最大，应使上式分母最小，因此当 $x=0$ 时，曲率最大，即

$$K=0.8\cdot$$

于是曲率半径的最小值为

$$R=\frac{1}{K}=\frac{1}{0.8}=1.25$$

可见，应选半径不超过 1.25 单位长，即直径不超过 2.5 单位长的砂轮.

当然，本题也可以直接用公式

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

求得曲率半径的最小值.

习题七

求下列各曲线在指定点处的曲率及曲率半径：

（1） $y=\sin x$ 在点$\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$；

（2） $y=\ln x$ 在点$(1,0)$;

（3） $y=x^3$ 在点 $(-1,-1)$.

复习题三

1．求下列函数的极值和单调区间．

（1）$f(x)=2x^3-3x^2$　　（2）$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

2．求下列函数的凹凸区间与拐点．

（1）$y=x^3-5x^2+3x-5$　　（2）$y=x\ln x$

3．用洛必达法则求下列极限．

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1}{x^2\cos x}$　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$

（5）$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$　　（6）$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$

4．证明不等式 $\ln(x+1)>\dfrac{x}{1+x}$ （$x>0$）．

5．求下列曲线的渐近线．

（1）$y=\dfrac{1}{x^2-4x-5}$　　（2）$y=\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$

6．求下列曲线在指定点处的曲率：

（1）$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在坐标原点处；

（2）抛物线 $y=4x-x^2$ 在其顶点处．

7．要做一个长方体无盖蓄水池，其容积为 500 立方米，底面为正方形．设底面与四壁的单位造价相同，问底边和高各为多少米时，才能使所用材料最省？

8．生产某种产品 q 个单位的费用为 $C(q)=5q+200$，收入函数为 $R(q)=25q-0.5q^2$，问每批生产多少个单位，才能使利润最大？

9．已知某产品的需求函数为 $p=20-\dfrac{q}{4}$，总成本函数为 $C(q)=4q+60$，问产量 q 为多少时，利润最大？最大利润是多少？

10．某快餐店每月对汉堡包的需求由 $p(x)=\dfrac{60000-x}{20000}$ 确定，其中 x 是需求量，p 是价格．又设生产每个汉堡包的成本为 $C(x)$=5000+0.56x（$0\leqslant x\leqslant 50000$），试问当产量是多少时，快餐店能获得最大利润？